

Gewöhnliche Differentialgleichungen

1. Man zeige, daß die für $\nu \neq 0$ durch

$$u(t) = \frac{1}{\nu} \int_0^t \sin(\nu(t-s)) f(s) ds \quad \text{für } t > 0$$

definierte Funktion eine Lösung des folgenden Anfangswertproblems ist:

$$u''(t) + \nu^2 u(t) = f(t) \quad \text{für } t > 0, \quad u(0) = u'(0) = 0.$$

2. Analog zu 1. bestimme man eine allgemeine Darstellung für die Lösung des Anfangswertproblems

$$u'(t) + \mu u(t) = f(t) \quad \text{für } t > 0, \quad u(0) = 0.$$

Hinweis: Man multipliziere die Differentialgleichung mit einer geeignet gewählten Funktion, welche die Anwendung der Produktregel ermöglicht.

3. Für $k, \ell \in \mathbb{N}$ beweise man die Orthogonalität

$$\int_0^1 \sin k\pi x \sin \ell\pi x dx = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } \ell = k, \\ 0 & \text{für } \ell \neq k. \end{cases}$$