Gewöhnliche Differentialgleichungen

28. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$(x^2-1)y''(x)+xy'(x)-\alpha^2 y(x)=0 \quad \text{für } x\in(-1,1),\ \alpha\in\mathbb{R}.$$

a. Man bestimme zwei linear unabhängige Lösungen in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

b. Man zeige, daß für $\alpha \in \mathbb{N}_0$ jeweils eine Lösung durch ein Polynom vom Grad α gegeben ist.

c. Für $\alpha = 0,1,2,3$ bestimme man die polynomialen Lösungen $y(x)$ mit $y(1)=1$.

29. Die in Aufgabe **28.** konstruierten Tschebyscheff–Polynome genügen der rekursiven Darstellung

$$T_0(x)=1, \quad T_1(x)=x, \quad T_{k+1}(x)=2xT_k(x)-T_{k-1}(x) \quad \text{für } k=1,2,\ldots, \quad x\in\mathbb{R}.$$

a. Ausgehend von der rekursiven Darstellung beweise man die Darstellung

$$T_k(x)=\cos(k\arccos x) \quad \text{für } x\in[-1,1].$$

b. Ausgehend von der rekursiven Darstellung beweise man die Darstellung

$$T_k(x)=\frac{1}{2}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^k+(x-\sqrt{x^2-1})^k\right] \quad \text{für } x\in\mathbb{R}.$$

30. Man bestimme die allgemeine Lösung der Airyschen Differentialgleichung

$$y''(x)-x\,y(x)=0 \quad \text{für } x\in\mathbb{R}.$$