Gewöhnliche Differentialgleichungen

31. Man beweise die Orthogonalität

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_j(x)T_\ell(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} 0 & \text{für } \ell \neq j, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{für } \ell = j \neq 0, \\ \pi & \text{für } \ell = j = 0 \end{cases}$$

der Tschebyscheff–Polynome $T_\ell(x)$.

32. Man bestimme die Nullstellen $x_k^{(n+1)}$ des Tschebyscheff–Polynoms $T_{n+1}(x)$ und verwende diese als Stützstellen der numerischen Integrationsformel

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} f(x_k^{(n+1)})\omega_k$$

mit den Integrationsgewichten

$$\omega_k = \int_{-1}^{1} \frac{L_k^n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad L_k^n(x) = \prod_{\ell=0,\ell\neq k}^{n} \frac{x - x_\ell^{(n+1)}}{x_k^{(n+1)} - x_\ell^{(n+1)}}.$$

Man zeige, daß die Integrationsformel für alle Polynome $f_m(x)$ vom Grad $m \leq 2n+1$ exakt ist. Man verwende die Entwicklung der Lagrange–Polynome $L_k^n(x)$ nach den Tschebyscheff–Polynomen $T_i(x)$ zur Berechnung von

$$\omega_k = \frac{\pi}{n+1} \quad \text{für alle } k = 0, \ldots, n.$$

33. Man beweise die Orthogonalität

$$\sum_{i=0}^{n} T_k(x_i^{(n+1)})T_\ell(x_i^{(n+1)}) = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell, \\ \frac{1}{2}(n+1) & \text{für } k = \ell \neq 0, \\ n+1 & \text{für } k = \ell = 0 \end{cases}$$

und verwende diese zur Bestimmung des Interpolationspolynoms

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(x),$$

welches in den Stützstellen $x_i^{(n+1)}$ mit einer gegebenen Funktion $f(x)$ übereinstimmt.