Gewöhnliche Differentialgleichungen

Betrachtet wird das Anfangswertproblem

$$\partial_t u(t) = f(t) \quad \text{für } t \in (0,T), \quad u(0) = 0.$$

Sei $L^2(0,T)$ der Raum der in $(0,T)$ quadratintegrierbaren Funktionen mit der Norm

$$\|u\|_{L^2(0,T)} := \left(\int_0^T [u(t)]^2 \, dt \right)^{1/2}.$$

Ferner sei $H^1_{0,}(0,T)$ der Raum der quadrat–integrierbaren Funktionen, deren erste Ableitung ebenfalls quadrat–integrierbar ist, und die im Nullpunkt verschwinden. Eine Norm sei

$$\|u\|_{H^1_{0,}(0,T)} := \left(\int_0^T [u(t)]^2 dt + \int_0^T [\partial_t u(t)]^2 dt \right)^{1/2}.$$

40. Man stelle eine Variationsformulierung zur Bestimmung von $u \in H^1_{0,}(0,T)$ auf.

41. Man zeige, daß $\|\partial_t u\|_{L^2(0,T)}$ eine äquivalente Norm in $H^1_{0,}(0,T)$ definiert.

42. Für gegebenes $v \in L^2(0,T)$ bestimme man ein $u_v \in H^1_{0,}(0,T)$ so dass gilt:

$$\int_0^T \partial_t u_v(t) v(t) \, dt \neq 0 \, .$$