

Gewöhnliche Differentialgleichungen

10. Gegeben sei die nicht exakte Differentialgleichung

$$(x + 3y)dx + xdy = 0.$$

Man bestimme einen integrierenden Faktor und bestimme alle Lösungen dieser Differentialgleichung. Man bestimme die Lösung, welche die Anfangsbedingung $y(1) = 1$ erfüllt.

11. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(x) = x y(x) (y(x) - 2) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \quad y(0) = 1.$$

- a. Man bestimme die Lösung $y(x)$.
- b. Man gebe die Lösung y implizit als Lösung einer Gleichung $F(x, y) = 0$ mit geeignet gewähltem $F(x, y)$ an.
- c. Kann die unter **a.** erhaltene Lösung als Lösung einer exakten Differentialgleichung angegeben werden? Gibt es einen Zusammenhang mit der ursprünglichen Differentialgleichung?

12. Man untersuche die folgenden Funktionen $f(x)$ in ihrem jeweiligen Definitionsbereich D auf Lipschitz–Stetigkeit und bestimme gegebenenfalls die kleinstmögliche Lipschitz–Konstante.

- a. $f(x) = \cos x$, $D = [0, \pi]$;
- b. $f(x) = |x|$, $D = \mathbb{R}$;
- c. $f(x) = \sqrt{x}$, $D = [2, \infty)$;
- d. $f(x) = \sqrt{x}$, $D = [0, 2]$.