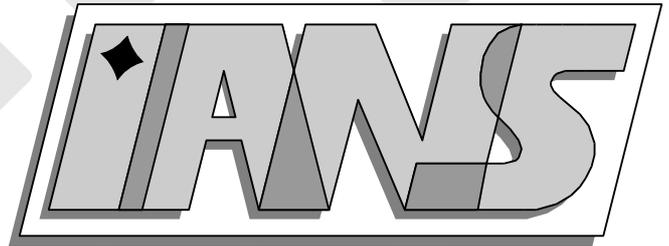


**Universität
Stuttgart**



**Partielle Differentialgleichungen
Vorlesung im Wintersemester 2005/2006**

Prof. Dr. Anna-Margarete Sändig

**Berichte aus dem Institut für
Angewandte Analysis und Numerische Simulation**

Universität Stuttgart

Partielle Differentialgleichungen
Vorlesung im Wintersemester 2005/2006

Prof. Dr. Anna-Margarete Sändig

**Berichte aus dem Institut für
Angewandte Analysis und Numerische Simulation**

Vorlesungsskript 2006/004

Institut für Angewandte Analysis und Numerische Simulation (IANS)
Fakultät Mathematik und Physik
Fachbereich Mathematik
Pfaffenwaldring 57
D-70 569 Stuttgart

E-Mail: ians-preprints@mathematik.uni-stuttgart.de

WWW: <http://preprints.ians.uni-stuttgart.de>

ISSN 1611-4176

© Alle Rechte vorbehalten. Nachdruck nur mit Genehmigung des Autors.
IANS-Logo: Andreas Klimke. \LaTeX -Style: Winfried Geis, Thomas Merkle.

Inhaltsverzeichnis

Einführende Begriffe	9
1 Mathematische Modellierung	15
1.1 Modellierung von Fließ- und Transportvorgängen	15
1.2 Modellierung von Diffusionsprozessen	20
1.3 Modellierung von Schwingungen	23
1.4 Modellierung von stationären Prozessen	24
1.5 Anfangs- und Randbedingungen	25
1.6 Korrekt gestellte Probleme	29
2 Differentialgleichungen erster Ordnung	31
2.1 Lokale klassische Lösungen	33
2.2 Schwache Lösungen von Erhaltungsgleichungen	39
3 Differentialgleichungen zweiter Ordnung	49
3.1 Typeinteilung	49
3.2 Die Fouriemethode	58
3.2.1 Randwertprobleme für die Laplace Gleichung	58
3.2.2 Rand-Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung	65
3.2.3 Rand-Anfangswertproblem für die Wellengleichung	70
4 Schwache Lösungen	73
4.1 Schwache Ableitungen	73
4.2 Stationäre Randwertprobleme und ihre schwache Formulierung	80
4.3 Bilinearformen und Lax-Milgram Lemma	81
4.4 Allgemeine Randwertprobleme für die Poissongleichung	89
4.5 Anfangs- Randwertprobleme und ihre schwache Lösung	96
5 Variationsmethoden für nichtlineare Probleme	107
5.1 Euler-Lagrange Gleichungen	107
5.2 Existenz von Minimierern	113
5.3 Systeme	131

Einleitung

Diese vierstündige studienbegleitende Vorlesung ist als Einführung in die umfangreiche Theorie partieller Differentialgleichungen gedacht. Dabei werden vier Schwerpunkte gesetzt:

- Woher kommen partielle Differentialgleichungen? **Mathematische Modellierung**
- Was ist über die Lösbarkeit (Existenz und Eindeutigkeit) einiger Klassen von partiellen Differentialgleichungen bekannt? **Analysis**
- Was versteht man unter schwachen Lösungen? **Analysis mit numerischen Aspekten**
- Wie kann man Randwertprobleme für nichtlineare partielle Differentialgleichungen behandeln? **Variationsmethoden**

Zunächst wird gezeigt, wie man in Zeit und Raum ablaufende Prozesse in Form von partiellen Differentialgleichungen bzw. Systemen partieller Differentialgleichungen mit Rand- und Anfangsbedingungen mathematisch modelliert. Dies soll durch Beispiele, wie Modellierung von Fließ- und Transportvorgängen, Verformungen, Diffusionen und Wellen illustriert werden. Um die partiellen Differentialgleichungen systematisch untersuchen zu können wird eine Klassifizierung (Ordnung und Typ, linear und nichtlinear) vorgenommen. Wir beginnen mit dem Lösen von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit Hilfe der Charakteristikenmethode und beschreiben schwache Lösungen. Danach werden lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung behandelt. Dabei konzentrieren wir uns auf typische Beispiele: Randwertprobleme für die Poissongleichung (elliptische Gleichung) und Rand-Anfangswertprobleme für eine Wellengleichung (hyperbolische Gleichung) sowie für die Wärmeleitungsgleichung (parabolische Gleichung). Im 3.Kapitel der Vorlesung werden so genannte schwache Formulierungen von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung hergeleitet. Diese sind grundlegend, um mit Hilfe von Galerkinverfahren (z.B. Finite-Elemente-Methoden) die entsprechenden Probleme numerisch lösen zu können. Im letzten Abschnitt wenden wir uns nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen 2.Ordnung zu, die als Euler-Lagrange Gleichungen formuliert werden können. Wir diskutieren direkte und indirekte Methoden der Variationsrechnung zum Nachweis der Existenz eines Minimums eines zugehörigen Funktionals, das dann auch schwache Lösung eines Randwertproblems ist.

Die vierstündige Vorlesung mit Übungen wendet sich an Mathematikstudenten im Hauptstudium. Interessierte Physik- und Ingenieur-Studenten sind willkommen.

Einführende Begriffe

Bei der mathematischen Modellierung von in Raum und Zeit ablaufenden Prozessen werden häufig partielle Differentialgleichungen hergeleitet. In diesen Gleichungen bzw. Gleichungssystemen treten unbekannte Funktionen von zwei und mehr Variablen und ihre partiellen Ableitungen auf.

Definition 1 Es sei $k \geq 1$ eine ganze Zahl. Eine Gleichung der Form

$$F(\nabla^k u(x), \nabla^{k-1} u(x), \dots, \nabla u(x), u(x), x) = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

wird partielle Differentialgleichung der Ordnung k genannt. Hierbei ist

$$\begin{aligned} \nabla^k u(x) &:= \{D^\alpha u(x), |\alpha| = k\}, \\ \alpha &= (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad \text{ein Multiindex} \end{aligned} \quad (2)$$

und $\alpha_i \geq 0$ sind ganze Zahlen, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$,

$$D^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n} u(x). \quad (3)$$

Die Funktion

$$F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}.$$

ist gegeben (die Reihenfolge der Differentiationen wird berücksichtigt) und

$$u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist die Unbekannte.

Die Lösungsmenge ist i.a. sehr reichhaltig und wird häufig durch Randbedingungen bzw. Anfangsbedingungen eingeschränkt.

Definition 2

(i) Die partielle Differentialgleichung (1) ist **linear**, falls sie die Gestalt

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x) \quad (4)$$

hat, wobei die Koeffizienten $a_\alpha(x)$ gegebene Funktionen sind. Ist $f(x) = 0$, so spricht man von einer homogenen Gleichung.

(ii) Sie heißt **semilinear**, falls sie in der Form

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u + a_0(\nabla^{k-1} u, \dots, \nabla u, u, x) = 0 \quad (5)$$

gegeben ist.

(iii) Die Gleichung (1) ist **quasilinear**, falls sie durch

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(\nabla^{k-1}u, \dots, \nabla u, u, x) D^\alpha u + a_0(\nabla^{k-1}u, \dots, \nabla u, u, x) = 0 \quad (6)$$

beschrieben wird.

(iv) Die Gleichung (1) ist **stark nichtlinear**, falls sie nichtlinear bis zu den höchsten Ableitungen ist.

Neben skalaren partiellen Differentialgleichungen treten in der Kontinuumsmechanik häufig Systeme von partiellen Differentialgleichungen auf. In diesem Fall ist die Unbekannte ein Vektorfeld

$$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m). \quad (7)$$

Anmerkung : Vektorielle Größen werden in diesem Skript in Fettdruck geschrieben.

Definition 3 Ein System von m partiellen Differentialgleichungen k -ter Ordnung hat die Gestalt

$$\mathbf{F}(\nabla^k \mathbf{u}(\mathbf{x}), \nabla^{k-1} \mathbf{u}(\mathbf{x}), \dots, \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = 0, \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

wobei

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^{mn^k} \times \mathbb{R}^{mn^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^{mn} \times \mathbb{R}^m \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Systeme können auch aus weniger oder mehr als m Gleichungen bestehen. Die Definition 2 klassifiziert in entsprechender Weise auch Systeme von partiellen Differentialgleichungen.

Charakteristisch für partielle Differentialgleichungen ist, dass es keine einheitliche allgemeine Theorie gibt, die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen in geeigneten Funktionenräumen beschreibt. Daher konzentriert man sich zumeist auf partielle Differentialgleichungen, die eine Rolle in Anwendungen spielen. Wir führen im Folgenden eine Reihe von Beispielen an, um zunächst verschiedene grundlegende partielle Differentialgleichungen kennenzulernen. Woher sie kommen wird exemplarisch im nächsten Kapitel ausgeführt.

Beispiele für lineare partielle Differentialgleichungen

Skalare Gleichungen

(i) Laplace- und Poissongleichung

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = 0, \quad (8)$$

$$-\Delta u = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f. \quad (9)$$

Hier ist die Unbekannte $u = u(\mathbf{x})$ z.B. ein Potential, eine (stationäre) Temperatur, eine Konzentration oder ein Druck. (8) und (9) sind lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

(ii) Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f. \quad (10)$$

Die Unbekannte $u = u(\mathbf{x}, t)$ hängt vom Ort \mathbf{x} und der Zeit t ab. Sie beschreibt z.B. die Temperatur bzw. die Konzentration von Substanzen. $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ ist eine Konstante, wobei ρ die Massendichte, c die spezifische Wärme und k die Wärmeleitfähigkeit bezeichnen.

(iii) Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = f. \quad (11)$$

$u = u(\mathbf{x}, t)$ beschreibt die Auslenkung eines Stabes ($n = 1$), einer Membran ($n = 2$) bzw. die Ausbreitung von Schall oder elektromagnetischen Wellen ($n = 3$); c bezeichnet die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit.

(iv) Helmholtz-Gleichung

$$\Delta u_0 + k^2 u_0 = -\frac{f_0}{a^2} = f. \quad (12)$$

Man erhält sie aus der Wellengleichung, in dem man $f(\mathbf{x}, t) = f_0(\mathbf{x})e^{i\omega t}$ annimmt und periodische Lösungen der Form $u(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x})e^{i\omega t}$ sucht. (Übung!)

(v) Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta u = 0, \quad (13)$$

wobei $u = u(\mathbf{x}, t)$ die Wellenfunktion eines Quantenpartikels der Masse m ist und \hbar die Plancksche Konstante bezeichnet.

(vi) Biharmonische Gleichung (Kirchhoffsche Plattengleichung)

$$\Delta^2 u = \frac{f}{D}. \quad (14)$$

$u = u(\mathbf{x})$ bezeichnet die Durchbiegung, D die Dicke der Platte.

(vii) **Transportgleichung**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

Hier ist $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ die Dichte, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ das Geschwindigkeitsfeld. Entweder muss \mathbf{v} bekannt oder als Funktion der Dichte gegeben sein.

(viii) **Konvektion-Diffusionsgleichungen**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} u = k \Delta u.$$

$u = u(\mathbf{x}, t)$ bezeichnet die Konzentration eines Stoffes, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ die Geschwindigkeit, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ ist das Skalarprodukt im n -dimensionalen Euklidischen Raum.

Systeme(i) **Lamé-Gleichungen (lineare Elastizität)**

$$-L\mathbf{u} = -(\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u})) = \mathbf{f}.$$

\mathbf{u} bezeichnet das Verschiebungsfeld unter der Belastung \mathbf{f} ; λ, μ sind Lamé-Koeffizienten; ∇ ist der Nablaoperator (Gradient).

(ii) **Elastische Schwingungsgleichungen**

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - L\mathbf{u} = \mathbf{f}.$$

Die Felder $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ beschreiben elastische Wellen, L ist in (i) definiert.

(iii) **Stokes-Gleichungen**

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{u} + \operatorname{grad} p &= \mathbf{f}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0. \end{aligned}$$

Hier ist $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ die Geschwindigkeit einer kompressiblen Strömung, p bezeichnet den Druck, ν ist der Viskositätsparameter.

(iv) **Maxwell-Gleichungen**

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\varepsilon \mathbb{E}) &= 4\pi \rho, & \operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) &= 0, \\ \operatorname{curl} \mathbb{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial(\mu \mathbf{H})}{\partial t}, \\ \operatorname{curl} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial(\varepsilon \mathbb{E})}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{I}. \end{aligned}$$

c ist die Lichtgeschwindigkeit, μ die magnetische Permeabilität, ε die dielektrische Konstante, \mathbb{E} die elektrische Feldstärke und \mathbf{H} die magnetische Feldstärke.

Nichtlineare Gleichungen

(i) **Nichtlineare Poissongleichung**

$$-\Delta u = f(u).$$

(ii) **p-Laplace-Gleichung**

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0, \quad p > 1.$$

(iii) **Gleichung zur Bestimmung von minimalen Oberflächen**

$$-\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{(1 + |\nabla u|^2)^{\frac{1}{2}}}\right) = 0.$$

(iv) **Skalare Erhaltungsgleichung**

$$u_t + \operatorname{div} \mathbf{f}(u) = 0.$$

(v) **Burgers Gleichung**

$$u_t + u u_x = 0.$$

(vi) **Reaktions-Diffusions-Gleichung**

$$u_t - \Delta u = f(u).$$

Nichtlineare Systeme

(i) **Euler Gleichungen für inkompressible Flüsse**

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + \nabla \mathbf{u} \mathbf{u} &= -\nabla p, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0. \end{aligned}$$

(ii) **Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible viskose Flüsse**

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + \nabla \mathbf{u} \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} &= -\nabla p, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0. \end{aligned}$$

p bezeichnet den Druck, \mathbf{u} das vektorielle Geschwindigkeitsfeld und ν ist der Viskositätsparameter.

Kapitel 1

Mathematische Modellierung

In diesem Kapitel untersuchen wir, wie Fließ- und Transportvorgänge, Diffusionen, Wellen und einige stationäre Prozesse mathematisch modelliert werden, d.h. woher die entsprechenden partiellen Differentialgleichungen mit Rand- bzw. Anfangsbedingungen kommen.

1.1 Modellierung von Fließ- und Transportvorgängen

Wir betrachten die Strömung einer Flüssigkeit oder eines Gases, d.h. eines Fluids. Wir nehmen an, das Fluid sei ein 3-dimensionales Kontinuum, das eine offene Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ füllt. Jeder Punkt $\boldsymbol{x} \in \Omega$ ist ein infinitesimales Teilchen des Fluids. In der Physik wird ein reales Fluid als endliche Menge von Molekülen beschrieben. Die Strömungsbewegungen der Teilchen im Kontinuumsmodell (makroskopische Skala) sind zwar verschieden von den Molekülbewegungen in einem Fluid (mikroskopische Skala), erfassen jedoch sehr gut vielfältige Strömungsphänomene.

Um eine mathematische Beschreibung der Teilchenbewegung vornehmen zu können, benötigen wir eine Zeitvariable $t \in \mathbb{R}^+ := \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ und Ortskoordinaten $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ bezüglich einer orthogonalen Basis.

Wir beschreiben die Bewegung durch eine Abbildung

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3, \\ \phi(t, \boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{y}, \\ \phi(0, \boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

Für festes t sei $\phi^t(\cdot) = \phi(t, \cdot)|_{t \text{ fest}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine eindeutige Abbildung; siehe Abbildung 1.1.

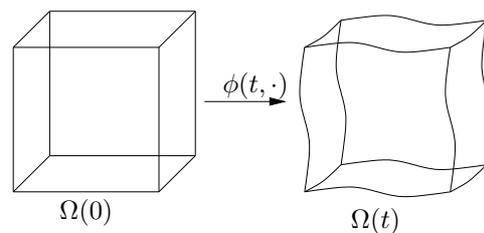


Abbildung 1.1: Deformation $\phi(t, \cdot)$

Für festes \mathbf{x} beschreibt

$$\phi^{\mathbf{x}}(\cdot) = \phi(\mathbf{x}, \cdot)|_{\mathbf{x}_{\text{fest}}} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$$

eine Kurve:

$$\phi^{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{y}(t).$$

Diese Kurve wird als Bahnkurve oder Trajektorie des Teilchens bezeichnet, das zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ am Ort \mathbf{x} war; siehe Abbildung 1.2.

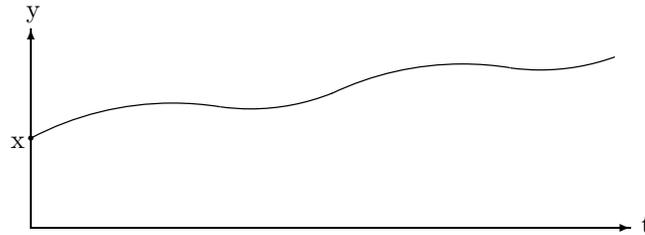


Abbildung 1.2: Trajektorie

Definition 4

$$\mathbf{v}(t, \phi^{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{v}(t, \mathbf{y}(t)) = \frac{\partial}{\partial t} \phi(t, \mathbf{x}) = \frac{d\mathbf{y}}{dt}(t)$$

bezeichnet das Geschwindigkeitsfeld des Teilchens \mathbf{x} , das sich zum Zeitpunkt t am Ort $\mathbf{y}(t)$ befindet.

Ist $\mathbf{v}(t, \mathbf{y})$ bekannt, dann können die Bahnkurven als Lösung eines Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit Anfangsbedingungen berechnet werden:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} &= \mathbf{v}(t, \mathbf{y}), \\ \mathbf{y}(0) &= \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Beispiel: Es sei

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} ty_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= ty_1, \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_2, \\ \frac{dy_3}{dt} &= 0, \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Die Lösung lautet $\mathbf{y}(t) = (x_1 e^{\frac{1}{2}t^2}, x_2 e^t, x_3)$.

Herleitung einer Transportgleichung

Um nun eine partielle Differentialgleichung für den Fluss bzw. Transport herzuleiten, greifen wir auf den Massenerhaltungssatz zurück. Wir betrachten eine stetige Dichtefunktion ρ (Massendichte) in den Koordinaten: $\rho = \rho(t, \mathbf{y}(t)) = \rho(t, \mathbf{y})$ der aktuellen Konfiguration. Zum Zeitpunkt $t = 0$ betrachten wir ein Kontrollvolumen $\Omega(0)$. $\Omega(t)$ sei das weitergeströmte Kontrollvolumen zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}^+$.

Definition 5 ρ genügt einer integralen Erhaltungsgleichung, falls für jedes $\Omega(0) \subset \mathbb{R}^3$

$$m = \text{masse} = \int_{\Omega(0)} \rho(0, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega(t)} \rho(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \text{const}, \quad (1.1)$$

d.h.

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = 0 \quad (1.2)$$

ist.

Wir berechnen nun die Ableitung

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y} ..$$

Satz 1 (Reynolds'scher Transportsatz) Es sei $\rho : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Dichtefunktion, und $\phi^t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar. Dann gilt für jedes beschränkte Kontrollvolumen die Gleichung:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\Omega(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t}(t, \mathbf{y}) + \text{div}(\rho(t, \mathbf{y}) \mathbf{v}(t, \mathbf{y})) \right] d\mathbf{y}.$$

Beweisskizze von Satz 1

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y} &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega(0)} \rho(t, \phi(t, \mathbf{x})) \det \nabla_{\mathbf{x}} \phi(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega(0)} \frac{d}{dt} [\rho(t, \phi(t, \mathbf{x})) F(t, \mathbf{x})] d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega(0)} \left[\frac{d}{dt} \rho(t, \phi(t, \mathbf{x})) F(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \rho(t, \phi(t, \mathbf{x})) \frac{d}{dt} F(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \right], \end{aligned}$$

wobei $F(t, \mathbf{x}) = \det \nabla_{\mathbf{x}} \phi(t, \mathbf{x})$ ist.

Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \rho}{\partial \phi_j} \frac{\partial \phi_j}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \rho}{\partial \phi_j} v_j + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla_{\mathbf{y}} \rho \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t}. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt [20, Seite 21, 22]

$$\frac{d}{dt}F(t, \mathbf{x}) = F(t, \mathbf{x})\operatorname{div}\mathbf{v}.$$

Daher wird

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y} &= \int_{\Omega(0)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{y}} \rho \cdot \mathbf{v} + \rho \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{v} \right] F(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) d\mathbf{y} \\ &= \int_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right) d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

■

Folgerung

Falls der Integrand stetig ist, erhält man aus der Tatsache, dass das Reynoldsche Transporttheorem für beliebige Volumina $\Omega(t)$ gilt,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (1.3)$$

Diese partielle Differentialgleichung 1. Ordnung bezeichnet man als Kontinuitätsgleichung, sie ist eine Erhaltungsgleichung in Divergenzform. Um die Differentialgleichung zu lösen, muss die Geschwindigkeit \mathbf{v} bekannt, bzw. als Funktion der Dichte gegeben sein.

Bemerkung

Im Folgenden ändern wir die Bezeichnung, \mathbf{y} wird durch \mathbf{x} ersetzt, um mit den in der Literatur häufig benutzten Variablen konform zu sein.

Beispiele

1. Lineare Advektionsgleichung

Es sei $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a} = \text{const}$. Dann ist

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{a}\rho) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho = 0. \quad (1.4)$$

Für $x = x_1$ (eindimensionaler Ort) erhalten wir

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + a \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

Fügen wir das Anfangsdatum $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$ hinzu, dann ist die Lösung

$$\rho(x, t) = \rho(x - at, 0) = \rho_0(x - at).$$

Anschaulich heißt dies, dass das Anfangs-Dichteprofil mit der Geschwindigkeit a "stromab" transportiert wird.

2. Kinematische Strömungsmodelle

Die Geschwindigkeit wird als Funktion der gesuchten lokalen Dichte dargestellt

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\rho(\mathbf{x}, t)).$$

Solche Strömungsmodelle heißen kinematisch.

Für

$$v = \frac{\rho}{2}, \quad x = x_1, \quad a = 1$$

folgt

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\rho^2}{2} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

Diese nichtlineare Differentialgleichung heißt Burgers Gleichung.

Sollen noch viskose Effekte erfasst werden, so erhält man [2]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = 0, \quad \nu > 0 \quad \text{Viskositätsparameter.}$$

3. Verkehrsströmung

Sei $\rho = \rho(x, t)$ die lokale Autodichte auf einer einspurigen Straße ($x = x_1$) und v die Geschwindigkeit. Es sei $0 \leq \rho \leq \rho_{max}$, wobei ρ_{max} die maximale Dichte (Stoßstange an Stoßstange) bezeichne. Da die Autos erhalten bleiben, muss die Erhaltungsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0$$

gelten. Wir nehmen an, dass $v = v(\rho)$ ist. Bei $\rho = 0$ (leere Straße) möchte man mit der maximalen Geschwindigkeit v_{max} fahren, je größer ρ ist, desto kleiner muss die Geschwindigkeit sein

$$v = v(\rho) = v_{max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\right).$$

Damit erhalten wir

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho v_{max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\right) \right] = 0.$$

Bemerkung

Eine allgemeinere Formulierung von Systemen von Erhaltungsgleichungen wird durch folgende Definition gegeben.

Definition 6 Erhaltungsgleichungen in n Raumdimensionen werden durch ein System partieller Differentialgleichungen (ρ wird durch \mathbf{u} ersetzt) gegeben:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{f}_i(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = 0.$$

Der Vektor $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1(\mathbf{x}, t), \dots, u_m(\mathbf{x}, t))^T$, mit

$$\mathbf{u} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^t \ni (\mathbf{x}, t) \rightarrow \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in S \subset \mathbb{R}^m$$

ist die gesuchte Lösung; die Elemente aus S heißen Zustände.

Die Abbildungen $\mathbf{f}_i : S \ni \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rightarrow \mathbf{f}_i(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)), i = 1, \dots, n$, sind Flussfunktionen.

1.2 Modellierung von Diffusionsprozessen

Diffusion in einer Raumrichtung

Wir stellen uns eine Röhre mit einer ruhenden Flüssigkeit vor. In der Flüssigkeit befindet sich ein Farbstoff, der von Bereichen höherer zu Bereichen niedriger Konzentration diffundiert (siehe Abbildung 1.3). Mit u bezeichnen wir die Konzentration des Farbstoffes. Die Diffusionsrichtung sei die x -Richtung, deshalb fassen wir den Diffusionsprozess als eindimensionalen Vorgang auf.

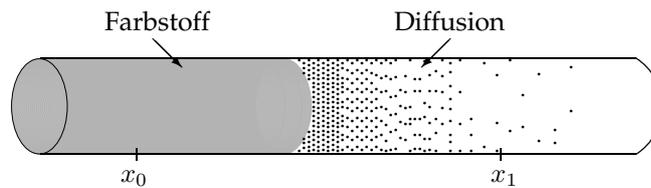


Abbildung 1.3: Diffusion in einer Röhre

Die Bewegung des Farbstoffes innerhalb des Intervalls (x_0, x_1) kann folgendermaßen beschrieben werden: Es sei $m(t, x)$ die Farbstoffmasse zum Zeitpunkt t und am Ort x . Die Gesamtmasse der Teilchen über dem Intervall (x_0, x_1) bezeichnen wir mit $m(t, (x_0, x_1))$. Es ist

$$m(t, (x_0, x_1)) = c \int_{x_0}^{x_1} u(t, x) dx,$$

wobei c eine Normierungskonstante ist. Daher erhalten wir

$$\frac{dm}{dt}(t, (x_0, x_1)) = c \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} dx.$$

Sei q die Stromdichte, d.h. die transportierte Masse pro Zeiteinheit. Ein Zusammenhang zwischen der Massenänderung pro Zeit, der Stromdichte und dem Konzentrationsgefälle im Intervall (x_0, x_1) liefert das 1. Ficksche Gesetz:

1. Ficksches Gesetz

Es gibt eine Proportionalitätskonstante (Diffusionskonstante) k , so dass für die Stromdichte q die Beziehungen

$$\frac{1}{c} \frac{dm}{dt}(t, (x_0, x_1)) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) dx = -q(t, x_1) + q(t, x_0) \quad (1.5)$$

und

$$q(t, x) = -k \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \quad (1.6)$$

gelten. Setzen wir (1.5) in (1.6) ein, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) dx &= k \frac{\partial u(t, x_1)}{\partial x} - k \frac{\partial u(t, x_0)}{\partial x} \\ &= k \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} dx. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Da die Integrationsgrenzen x_0 und x_1 beliebig sind, folgt aus (1.7) die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1.8)$$

(1.8) wird auch als 2. Ficksches Gesetz bezeichnet.

Diffusion in mehreren Raumrichtungen

Sei Ω_0 eine beliebige Teilmenge eines Gebietes Ω (für $n = 1$ war $\Omega_0 = (x_0, x_1)$). Es ist

$$m(t, \Omega_0) = m(t) = c \int_{\Omega_0} u(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$$

und

$$\frac{1}{c} \frac{dm(t)}{dt} = \int_{\Omega_0} u_t(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}.$$

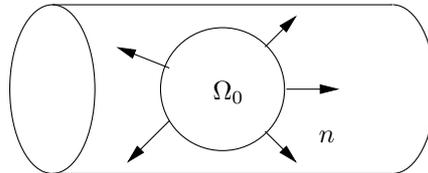


Abbildung 1.4: Fluß durch den Rand eines Gebietes Ω_0

Der Farbstoff diffundiert von Bereichen höherer Konzentration zu Bereichen niedriger Konzentration. Die Diffusion erfolgt über den Rand $\partial\Omega_0$ in Normalenrichtung \mathbf{n} (siehe Abbildung 1.4) und kann mit Hilfe der Stromdichte \mathbf{q} ausgedrückt werden

$$\int_{\Omega_0} u_t(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = - \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

Das 1.Ficksche Gesetz besagt, dass

$$\mathbf{q} = -k \nabla u,$$

wobei k die Diffusionskonstante bezeichnet.

Nach dem Gaußschen Satz erhalten wir

$$\int_{\Omega_0} u_t(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega_0} k \nabla u \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\Omega_0} \operatorname{div}(k \nabla u) d\mathbf{x}.$$

Da Ω_0 beliebig war, folgt die Differentialgleichung

$$u_t(\mathbf{x}, t) = \operatorname{div}(k \nabla u) = k \Delta u.$$

Sind Quellen (hineinfließen) oder Senken (hinausfließen) des Farbstoffes vorhanden, beschrieben durch die Quelldichten $f(\mathbf{x}, t)$, dann ergibt sich die inhomogene Diffusionsgleichung

$$u_t - k \Delta u = f(\mathbf{x}, t).$$

Im Allgemeinen ist $k = k(u)$ und damit

$$u_t - \operatorname{div}[k(u) \operatorname{grad} u] = f(\mathbf{x}, t).$$

Diffusionsgleichungen beschreiben u.a. die Brownsche Molekularbewegung, Populationsdynamik, chemische Diffusionen und Wärmeausbreitung.

Wärmeleitungsgleichung

Die Wärmeleitungsgleichung hat eine ähnliche Gestalt wie die Diffusionsgleichung. Sei $u(\mathbf{x}, t)$ die Temperatur, $H(t)$ die gesamte Wärmemenge eines Bereiches $\Omega_0 \subset \Omega$ (gemessen in Kalorien), dann gilt

$$H(t) = \int_{\Omega_0} c \rho u d\mathbf{x},$$

wobei c die spezifische Wärme und ρ die Dichte (Masse pro Volumeneinheit) ist. Es gilt

$$\frac{dH(t)}{dt} = \int_{\Omega_0} c \rho u_t d\mathbf{x}.$$

Nach dem Fourierschen Gesetz (vorher Ficksches Gesetz) fließt die Wärme von wärmeren zu kälteren Bereichen proportional zum Temperaturgradienten:

$$\mathbf{q} = \text{Wärmestromdichte} = -k \operatorname{grad} u.$$

Die Wärmeleitfähigkeit hängt i.a. von u ab; $k = k(u)$. In Ω_0 kann keine Wärme verloren gehen, sie tritt nur über den Rand $\partial\Omega_0$ aus. Die Änderung der Wärmemenge ist deshalb

$$\frac{dH(t)}{dt} = - \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\partial\Omega_0} k \nabla u \cdot \mathbf{n} d\sigma,$$

wobei k die Wärmeleitfähigkeit bezeichnet. Durch Anwenden des Divergenzsatzes folgt

$$\int_{\Omega_0} c \rho u_t d\mathbf{x} = \int_{\Omega_0} \operatorname{div}(k \nabla u) d\mathbf{x}$$

und damit

$$c \rho u_t = \operatorname{div}(k(u) \nabla u).$$

Ist $k = \text{const}$, erhalten wir wieder die Diffusionsgleichung:

$$u_t = \frac{k}{c\rho} \Delta u. \tag{1.9}$$

Konvektion-Diffusions Gleichung

Tritt ein Transport und eine Diffusion eines Stoffes in einer Flüssigkeit auf (z.B. Schadstoff im Grundwasser), dann genügt die Konzentration $u(\mathbf{x}, t)$ einer Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } u = k \Delta u. \quad (1.10)$$

Der Transport wird durch die Gleichung (1.3)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div}(u\mathbf{v}) = 0$$

beschrieben. Da für die skalare Größe u

$$\text{div}(u\mathbf{v}) = u \text{div } \mathbf{v} + \text{grad } u \cdot \mathbf{v}$$

gilt und unter der Annahme, dass $\text{div } \mathbf{v} = 0$ ist (inkompressible Stoffe), erhalten wir die linke Seite der Gleichung (1.10). Die Bilanzgleichung (1.10) bezieht die Diffusion (Ficksches Gesetz) mit ein.

Reaktion-Diffusions Gleichungen

Bei der Modellierung chemischer Reaktionen treten Systeme partieller Differentialgleichungen auf, z.B. [1]

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u - \phi^2 R(u, v), \\ v_t &= \Delta v + \beta R(u, v), \end{aligned}$$

wobei u die Stoffkonzentration, v die Temperatur, R die Reaktionsgeschwindigkeit (bekannt) und ϕ, β Konstanten sind.

1.3 Modellierung von Schwingungen

Schwingungen von Saiten, Membranen und dreidimensionalen Volumina können mathematisch durch Wellengleichungen der Form

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \text{div}(\alpha \text{grad } u) - \beta u + f(\mathbf{x}, t) \quad (1.11)$$

modelliert werden. Dabei sind ρ, α und β Materialkonstanten, $f(\mathbf{x}, t)$ charakterisiert die Intensität (Dichte) der äußeren Störung und $u = u(\mathbf{x}, t)$ ist die unbekannte Funktion, die z.B. die Auslenkung der Welle beschreibt. (1.11) wird durch Anfangs- und Randbedingungen komplettiert. Wir skizzieren nun, wie man elastische Schwingungen durch partielle Differentialgleichungen der Gestalt (1.11) beschreiben kann.

Elastische Schwingungen

Wir betrachten einen Körper $\Omega = \Omega(0) \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$, der durch eine Abbildung

$$\vec{\varphi}: \Omega(0) \times (t_0, T) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$$

abgebildet wird. Im aktuellen Gebiet $\Omega(t)$ wirken auf den Körper Volumenkräfte F , die durch stetige vektorwertige Dichtefunktionen f beschrieben werden können:

$$F(\Omega(t), t) = \int_{\Omega(t)} f(y, t) \, dy.$$

Als Impuls bezeichnet man das Integral

$$l(\Omega(t), t) = \int_{\Omega(t)} \varrho(y, t) v(y, t) \, dy,$$

wobei $\varrho = \varrho(y, t)$ eine skalare stetig differenzierbare Dichtefunktion und

$$v(y, t) = \frac{dy(t)}{dt}, \quad y(t) = \varphi(x, t)$$

ist. Um ein Gleichgewicht zwischen den angreifenden Kräften und der zeitlichen Impulsänderung ausdrücken zu können, wurde das folgende Axiom aufgestellt:

Gleichgewicht liegt vor, falls ein Spannungsvektor $\mathbf{t} = \mathbf{t}(y, t, n)$ existiert, so dass

$$\frac{d}{dt} l(\omega(t), t) = \int_{\omega(t)} f(y, t) \, dy + \int_{\partial\omega(t)} \mathbf{t}(y, t, n) \, d\sigma \quad (1.12)$$

für alle Kontrollvolumina $\omega(t) \subset \Omega(t)$ gilt. Man kann beweisen, dass $\mathbf{t}(y, t, n) = T(y, t)n$ ist, wobei n der äußere Normalenvektor an die Oberfläche $\partial\omega(t)$ ist, T ist eine $n \times n$ Matrix. Unter der Voraussetzung, dass das Massenerhaltungsgesetz gilt, kann man (1.12) berechnen. Hierbei wird das Reynolds'sche Transporttheorem und der Divergenzatz angewandt. Man erhält eine Gleichung für das Kräftegleichgewicht:

$$\varrho(y, t) \dot{v}(y, t) = \operatorname{div} T(y, t) + f(y, t). \quad (1.13)$$

Links tritt die Beschleunigung auf, $\varrho \dot{v}$ ist die Trägheitskraft, rechts steht eine rücktreibende Kraft, $\operatorname{div} T$, und die äußere Anregung f . Die $n \times n$ Matrix kann bei elastischen Körpern für kleine Schwingungen ausgedrückt werden:

$$T = T(\nabla \vec{u}) = T(\operatorname{grad} \vec{u}),$$

wobei \vec{u} der Verschiebungsvektor (Auslenkung) ist. Setzt man $u_1 = u_2 = 0, u_3 = u$, so erhält man schließlich für vertikale Auslenkungen die Gleichung (1.11) mit $\operatorname{div} T = \operatorname{div} (\mu \operatorname{grad} u)$. μ ist eine Materialkonstante.

1.4 Modellierung von stationären Prozessen

Zustände, bzw. Prozesse, bei denen sich die physikalischen Verhältnisse nicht mit der Zeit ändern, heißen stationär. In den vorangegangenen Modellierungen werden stationäre Zustände beschrieben, falls $u_t = 0$ bzw. $u_{tt} = 0$ sind. Dies führt im Wesentlichen zur homogenen Laplace-Gleichung:

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) u = 0,$$

bzw. zur inhomogenen Poissongleichung

$$\Delta u = -f(\mathbf{x}).$$

Die Gleichung $\Delta u = 0$ heißt auch Potentialgleichung. Ein Vektorfeld (Kraftfeld) \mathbf{v} besitzt ein Potential u , falls gilt:

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} u.$$

Beispiele

1. Bei einer stationären Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit ist

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Liegt weiterhin eine Potentialströmung vor, $\mathbf{v} = \operatorname{grad} u$, so folgt

$$\Delta u = 0.$$

2. Für die elektrische Feldstärke \mathbb{E} eines durch eine elektrostatische Ladung mit der Dichte ρ erzeugten Feldes gilt nach dem Coulombschen Gesetz

$$\operatorname{div} \mathbb{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (\varepsilon = \text{Dielektrizitätskonstante}).$$

Falls \mathbb{E} wirbelfrei ist, existiert ein elektrostatisches Potential, so dass $\mathbb{E} = -\operatorname{grad} u$ und

$$-\operatorname{div} \operatorname{grad} u = -\Delta u = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

ist.

3. Das Newtonsche Gravitationsgesetz führt, analog zu 2., zu der Gleichung

$$\Delta u = -\rho c,$$

wobei ρ die Massendichte und c eine Materialkonstante ist.

Helmholtz-Gleichung

Die stationäre Gleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

wird Helmholtz-Gleichung genannt.

Betrachtet man die Wellengleichung

$$w_{tt} - a^2 \Delta w = f(\mathbf{x}, t) = f_0(\mathbf{x}) e^{i\omega t},$$

mit periodischer Störung, der Frequenz ω und der Amplitude $f_0(\mathbf{x})$, so erhält man durch den Ansatz

$$w(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}) e^{i\omega t}$$

die Helmholtz-Gleichung

$$\Delta u + k^2 u = -\frac{f_0(\mathbf{x})}{a^2}, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}.$$

1.5 Anfangs- und Randbedingungen

Wir haben bisher lineare und nichtlineare partielle Differentialgleichungen und Systeme erster und zweiter Ordnung kennen gelernt, durch die instationäre und stationäre Prozesse modelliert werden. Weiterhin haben wir gesehen, dass sehr viele Lösungen auftreten. Es geht i.A. nicht darum, alle möglichen Lösungen zu berechnen, sondern solche, die Zusatzbedingungen genügen. Lösungsstrategien werden sich daran orientieren.

Wir werden uns zunächst mit Zusatzbedingungen in Form von physikalisch motivierten Anfangs- und Randbedingungen näher beschäftigen.

Anfangsbedingungen

Definition 7 Eine Anfangsbedingung legt den physikalischen Zustand eines Prozesses zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 fest.

Beispiel

Bei der Transportgleichung (1.3) wird die Dichte zum Zeitpunkt t_0 als gegeben betrachtet

$$\rho(t_0, \mathbf{x}) = \rho_0(\mathbf{x}).$$

Bei der Wärmeleitungsgleichung (1.9) wird die Temperatur zum Zeitpunkt t_0 vorgeschrieben

$$u(t_0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}).$$

In beiden Gleichungen treten erste Ableitungen nach der Zeit auf. Bei der Wellengleichung (11), in der eine 2. Ableitung nach der Zeit auftritt, werden sowohl Anfangslage, als auch Anfangsgeschwindigkeit vorgeschrieben:

$$\begin{aligned} u(t_0, \mathbf{x}) &= u_0(\mathbf{x}), \\ \frac{\partial u(t_0, \mathbf{x})}{\partial t} &= u_1(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Randbedingungen

Die Ortsvariable variiert oft in einem beschränkten Gebiet, z.B. wird die schwingende Saite durch ein Intervall der Länge l modelliert, die Membran durch einen ebenen Bereich, die diffundierende chemische Substanz durch einen Behälter. Der Schall wird sich je nach Situation in einem endlichen Bereich oder im unendlichen Raum ausbreiten, gleiches gilt für die Wärme.

Definition 8 Eine Randbedingung legt den physikalischen Zustand am Rand, bzw. an Teilrändern eines beschränkten räumlichen Gebietes fest. Durch sie wird auch das Verhalten der Lösung für $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ beschrieben.

Häufig auftretende Beispiele

- (D) u wird auf dem Rand vorgegeben (Dirichlet Bedingung, 1. Randwertproblem). Als Beispiel betrachten wir eine fest eingespannte Saite : $u(0, t) = u(l, t) = 0$.
- (N) $\frac{\partial u}{\partial n}$ bzw. die Normalspannung $\sigma \mathbf{n}$ wird auf dem Rand vorgegeben (Neumann Bedingung, 2. Randwertproblem). Zum Beispiel wird ein gelenkig gelagertes Saitenende, transversal ohne Widerstand, in einer Spur geführt, durch die Bedingung

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(l, t) = 0$$

modelliert.

- (R) $\frac{\partial u}{\partial n} + au$ wird vorgegeben (Robin Bedingung oder Newton Bedingung, 3. Randwertproblem). Ein Beispiel dazu wäre ein Saitenende, welches frei in einer Spur schwingt, aber durch eine Feder, bzw. ein Gummiband in die Gleichgewichtslage zurückgeführt wird.

Wir erläutern an weiteren Beispielen, wann welche Randbedingungen physikalisch sinnvoll sind.

Diffusion

Ist die diffundierende Substanz mit der Konzentration u in einem Behälter Ω eingeschlossen, d.h. es kann nichts hinzukommen, bzw. entweichen, dann muss nach dem Fickschen Gesetz gelten:

$$-k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Ist der Behälter durchlässig und wird die austretende Substanz sofort weggespült, dann ist

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Wärmeleitung

Vollständige Isolation des Körpers lässt keine Wärme über den Rand austreten, d.h.

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Befindet sich der Körper in einem großen Behälter mit der Temperatur $g(\mathbf{x}, t) = g(t)$ (siehe Abbildung 1.5) und findet vollständige Wärmeleitung statt, dann lautet die Randbedingung

$$u(\mathbf{x}, t) = g(t) \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

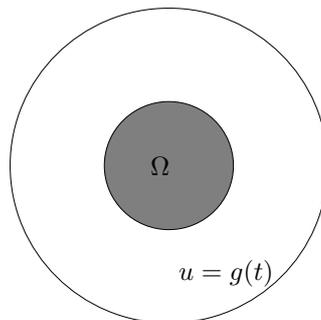


Abbildung 1.5: eingebetteter Körper

Stellen wir uns einen isolierten Stab vor, der bei $x = 0$ in einen Behälter der Temperatur $g(t)$ ragt (siehe Abbildung 1.6).

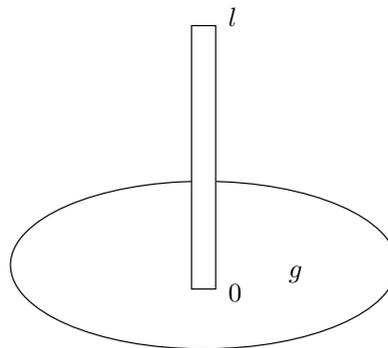


Abbildung 1.6: Stab im Behälter

Dann ist

$$-\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(0, t) = -a[u(0, t) - g(t)].$$

Bedingung im Unendlichen

Wenn wir Schall- oder Lichtwellen betrachten, die nach außen (ins Unendliche) strahlen, so ist die 'Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung'

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0,$$

eine physikalisch sinnvolle Randbedingung im Unendlichen. Hier ist $r = |\mathbf{x}|$.

Transmissionsbedingungen

Besteht das Gebiet Ω aus zwei Teilgebieten, $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$, unterschiedlicher Materialien, so treten an den gemeinsamen Randstücken (interfaces) so genannte Sprungbedingungen auf. Es sei z.B. ein Stahl-Beton Verbund gegeben (siehe Abbildung 1.7).

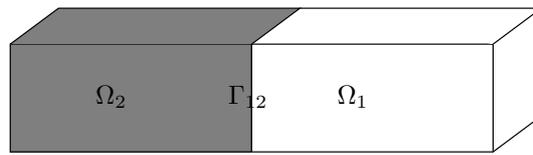


Abbildung 1.7: Stahl-Beton Verbund

In Ω_i betrachten wir die Wärmeleitungsgleichungen

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - k_i \Delta u_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

Am 'interface' $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 = \Gamma_{12}$ soll die Temperatur übereinstimmen

$$u_1(\mathbf{x}, t) = u_2(\mathbf{x}, t) \quad \text{auf } \Gamma_{12}.$$

Nach dem Fourierschen Gesetz ist der Wärmestrom

$$\mathbf{q}_i = -k_i \nabla u_i \quad \text{in } \Omega_i$$

und daher auf Γ_{12}

$$\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{n}_i = -k_i \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{n}_i}.$$

Da $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$, erhalten wir als stetige Übergangsbedingung

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}_1} + k_2 \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}_2} = k_1 \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}_1} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}_1} = 0,$$

was bei sehr unterschiedlichen Diffusionskoeffizienten zu großen Sprüngen führen kann.

Bei Verbänden aus elastischen Materialien lauten die Sprungrelationen an der Übergangsfläche für die Verschiebungsfelder \mathbf{u}_i und die Spannungsvektoren $\sigma_i \mathbf{n}_i$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 &= 0, \\ \sigma_1 \mathbf{n}_1 + \sigma_2 \mathbf{n}_2 &= 0, \end{aligned}$$

wobei $\sigma_i = \lambda_i \text{tr} \varepsilon(\mathbf{u}_i) + 2\mu_i \varepsilon(\mathbf{u}_i)$ ist.

Bei thermoelastischen Problemen haben wir auf Γ_{12} [14]:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 &= 0, \\ (\sigma_1 - \sigma_2) \mathbf{n}_1 &= [k_1(3\lambda_1 - 2\mu_1)T_1 - k_2(3\lambda_2 + 2\mu_1)T_2] \mathbf{n}_1, \end{aligned}$$

wobei T_i die Temperatur in Ω_i bezeichnet.

1.6 Korrekt gestellte Probleme

Wir betrachten partielle Differentialgleichungen in Operatorform

$$A u = A(\nabla^k, \nabla^{k-1}, \dots, \nabla^0)u = f \quad \text{in } \Omega \times (0, T) = Q_T.$$

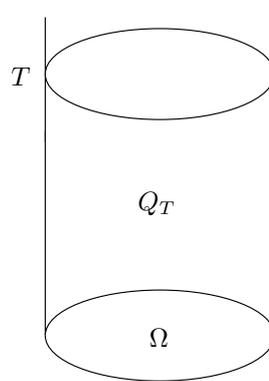


Abbildung 1.8: Raum-Zeit-Zylinder Q_T

Die Zusatzbedingungen (Anfangs- und Randbedingungen) fassen wir als Operator B zusammen

$$B u = g \quad \text{auf } \partial\Omega \times (0, T) \cup \Omega \times \{0\}.$$

Das Problem lautet: Man finde eine Lösung u aus einem Funktionenraum X für rechte Seiten $f \in Y, g \in Z$, so dass

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= (A, B) : X \rightarrow Y \times Z, \\ \mathcal{A} u &= (f, g)^T. \end{aligned}$$

Das Problem heißt im Hadamardschen Sinne (1902) korrekt gestellt, falls folgende fundamentale Eigenschaften gelten:

- (1) Existenz: Es existiert wenigstens eine Lösung.
- (2) Eindeutigkeit: Es gibt höchstens eine Lösung.
- (3) Stabilität: Kleine Änderungen von f und g bewirken kleine Änderungen der Lösung; anders ausgedrückt:

$$\mathcal{A}^{-1} \text{ existiert auf } Y \times Z \text{ und } \mathcal{A}^{-1} \text{ ist stetig.}$$

Man erwartet, dass physikalisch sinnvolle Modellierungen auf korrekt gestellte Probleme führen. Dies ist nicht immer der Fall.

Beispiel

Wir betrachten das Neumann Problem für die Poisson-Gleichung (stationäre Diffusionsgleichung in einem geschlossenen Behälter)

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= g \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit ist verletzt. Wäre u eine Lösung, dann ist auch $u + \text{const}$ eine Lösung.

Bei geeigneter Wahl der Räume X, Y, Z (Faktorräume, orthogonale Komplemente) kann auch in diesem Beispiel (1), (2) und (3) gesichert werden.

Klassische Lösungen von $\mathcal{A}u = (f, g)^T$ sind Funktionen $u \in C^k(\overline{Q_T})$.

Es existieren nicht immer klassische Lösungen. Betrachten wir z.B. die skalare Erhaltungsgleichung:

$$u_t + F(u)_x = 0.$$

Es treten i.A. Schockwellen (Unstetigkeitskurven der Lösung u) auf, die natürlich keine klassischen Lösungen sind. Das Konzept schwacher oder verallgemeinerter Lösungen (Lösungen im Distributionensinn) erfasst auch diese.

Kapitel 2

Differentialgleichungen erster Ordnung

Wir hatten bereits die lineare Advektionsgleichung (1.4) kennen gelernt (jetzt setzen wir $\rho = u$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2.1)$$

Diese Gleichung kann als Richtungsableitung interpretiert werden

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix},$$

d.h. u ist einerseits in Richtung von \mathbf{n} konstant und andererseits ist ∇u orthogonal zu \mathbf{n} . Damit ist ∇u auch orthogonal zu Geraden, die zu \mathbf{n} parallel verlaufen.

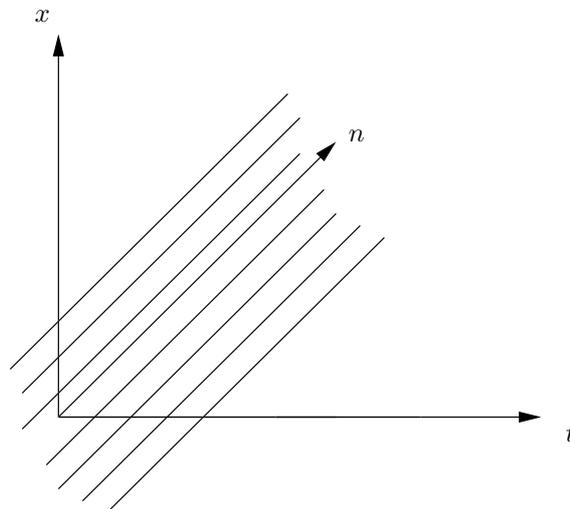


Abbildung 2.1: Die Charakteristiken

Die zu \mathbf{n} parallelen Geraden haben die Gestalt (siehe Abbildung 2.1)

$$x - at = \text{const}$$

und heißen Charakteristiken.

Die Lösung u ist konstant auf jeder Charakteristik, d.h. dort gilt

$$u(t, x) = C = f(\text{const}) = f(x - at),$$

wobei f eine unbestimmte differenzierbare Funktion ist.

Durch eine Anfangsbedingung, z.B.:

$$u(0, x) = \sin x = u_0(x)$$

kann f bestimmt werden:

$$f(x) = \sin x.$$

Es folgt:

$$u(t, x) = f(x - at) = u_0(x - at) = \sin(x - at).$$

Die Lösung $u(t, x)$ wird in Abbildung 2.2 dargestellt. Der Transport der Anfangsdaten erfolgt längs der Charakteristiken.

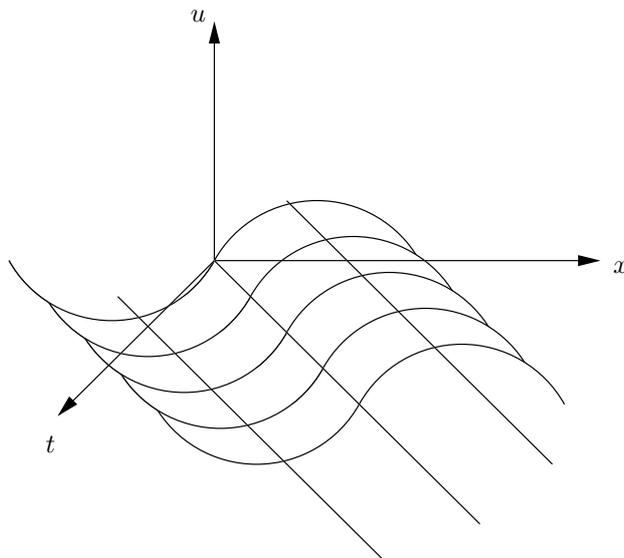


Abbildung 2.2: Transport entlang der Charakteristiken

Wir greifen diese Idee auf und untersuchen jetzt allgemeiner das *lokale* Lösungsverhalten einer quasilinearen Differentialgleichung 1.Ordnung mit Anfangsbedingungen.

2.1 Lokale klassische Lösungen

Wir führen zunächst den Begriff eines Cauchy-Problems ein für n räumliche Variable x und die Zeitvariable t .

Definition 9 Als *Cauchy Problem* bezeichnet man ein Anfangswertproblem für eine partielle Differentialgleichung, die in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ definiert ist.

Wir beginnen mit einem allgemeinen nichtlinearen Anfangswertproblem für Funktionen $u = u(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Gegeben sei

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u), \quad (2.2)$$

$$u(x_0(s), y_0(s)) = u_0(s), \quad (2.3)$$

wobei $a, b, c \in C^1(\Omega_3)$, $\Omega_3 \subset \mathbb{R}^3$, und $K(s) = \{(x_0(s), y_0(s), u_0(s))\}$ eine differenzierbare Kurve in Parameterdarstellung im \mathbb{R}^3 bezeichnet; $0 \leq s \leq l$. Gesucht ist eine Funktion $u = u(x, y) \in C^1(\Omega_2)$, $\Omega_2 \in \mathbb{R}^2$, so dass gilt $(x, y, u) \in \Omega_3$, d.h. $u = u(x, y)$ beschreibt eine glatte Fläche, die durch die Kurve $K(s)$ verläuft.

Ist u eine Lösung von (2.2), dann kann man die linke Seite von (2.2) als Richtungsableitung entlang einer Kurve \tilde{C} auffassen.

Sei

$$\mathcal{C}(\tau) = \{(x(\tau), y(\tau), u(\tau))\} \quad \text{eine Kurve in Parameterdarstellung im } \mathbb{R}^3,$$

$$\tilde{\mathcal{C}}(\tau) = \{(x(\tau), y(\tau))\}.$$

Dann ist für $u(x, y) = u(x(\tau), y(\tau)) = \tilde{u}(\tau)$ auf $\tilde{\mathcal{C}}$:

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{u}(\tau) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{d\tau}.$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= a(x(\tau), y(\tau), \tilde{u}(\tau)), \\ \frac{dy}{d\tau} &= b(x(\tau), y(\tau), \tilde{u}(\tau)), \\ \frac{d\tilde{u}}{d\tau} &= c(x(\tau), y(\tau), \tilde{u}(\tau)). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Definition 10 Die Differentialgleichungen (2.4) bezeichnet man als *charakteristische Differentialgleichungen*, die Kurve $\tilde{\mathcal{C}}$ als *Charakteristik* bzw. als *charakteristische Kurve*.

Bemerkung: u ist i.A. nicht konstant auf $\tilde{\mathcal{C}}$!

Die Kurve \mathcal{C} wird eindeutig festgelegt, wenn wir fordern

$$x(\tau = 0) = x_0, \quad y(\tau = 0) = y_0, \quad u(\tau = 0) = u_0$$

für $(x_0, y_0, u_0) \in \Omega_3$.

Wir betrachten jetzt die Anfangskurve

$$K(s) = \{(x_0(s), y_0(s), u_0(s))\} \subset \Omega_3 \quad \text{für } 0 \leq s \leq l,$$

und die Anfangsdaten für jedes $s \in [0, l]$

$$\begin{aligned} x(\tau = 0) &= x_0(s), & y(\tau = 0) &= y_0(s), \\ u(\tau = 0) &= u_0(s) = u(x_0(s), y_0(s)). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Wenn man die Charakteristiken von der Anfangskurve ausgehend verfolgt, erhält man eine Fläche (siehe Abbildung 2.3).

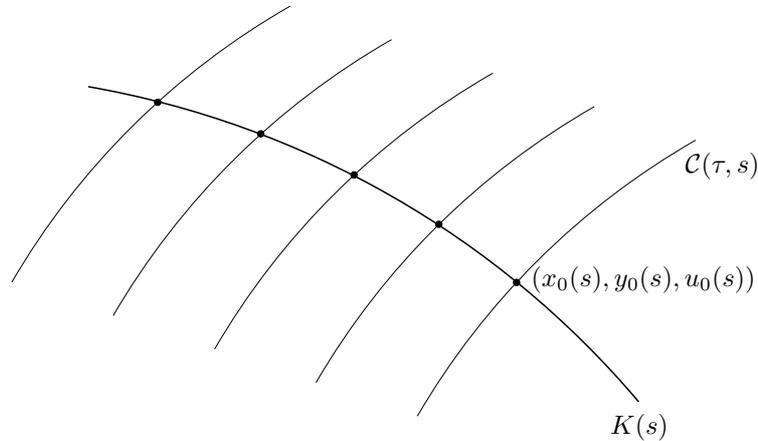


Abbildung 2.3: Fläche durch die Anfangskurve

Dabei darf der Fall, dass die Kurven \mathcal{C} und K parallel verlaufen, nicht auftreten.

Satz 2 Sei $K(s) = \{(x_0(s), y_0(s), u_0(s))_{0 \leq s \leq l}\}$ eine reguläre C^1 -Kurve in Ω_3 mit

$$\begin{vmatrix} a(x_0(s), y_0(s), u_0(s)) & b(x_0(s), y_0(s), u_0(s)) \\ \frac{dx_0(s)}{ds} & \frac{dy_0(s)}{ds} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.6)$$

Dann hat das Cauchyproblem (2.2), (2.3)

$$\begin{aligned} a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y &= c(x, y, u), \\ u(x_0(s), y_0(s)) &= u_0(s) \end{aligned}$$

genau eine stetig differenzierbare Lösung u in einer Umgebung von $K(s)$.

Beweisskizze von Satz 2, siehe [6, Seite 9-14]

Wir betrachten das parameterabhängige Anfangswertproblem von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= a(x(\tau), y(\tau), \tilde{u}(\tau)), \\ \frac{dy}{d\tau} &= b(x(\tau), y(\tau), \tilde{u}(\tau)), \\ \frac{d\tilde{u}}{d\tau} &= c(x(\tau), y(\tau), \tilde{u}(\tau)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(\tau = 0) &= x_0(s), \\ y(\tau = 0) &= y_0(s), \\ \tilde{u}(\tau = 0) &= u_0(s). \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf existieren Lösungen

$$x = X(\tau, s), \quad (2.7)$$

$$y = Y(\tau, s), \quad (2.8)$$

$$u = U(\tau, s), \quad (2.9)$$

die eine Fläche beschreiben. Können wir (2.7), (2.8) nach $\tau = T(x, y)$, $s = S(x, y)$ auflösen, dann erhalten wir $u(x, y) = U(T(x, y), S(x, y))$. Da

$$\begin{vmatrix} X_\tau & Y_\tau \\ X_s & Y_s \end{vmatrix}_{\substack{\tau=0 \\ 0 \leq s \leq l}} = \begin{vmatrix} a(x_0(s), y_0(s), u_0(s)) & b(x_0(s), y_0(s), u_0(s)) \\ \frac{dx_0(s)}{ds} & \frac{dy_0(s)}{ds} \end{vmatrix} \neq 0$$

ist, liefert uns der Satz über implizite Funktionen (Satz über lokale Invertierbarkeit) das gewünschte Resultat.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $u(x, y) = U(\tau, s) = U(T(x, y), S(x, y))$ Lösung des Cauchy-problems ist:

$$\begin{aligned} au_x + bu_y &= \frac{dx}{d\tau}(U_\tau T_x + U_s S_x) + \frac{dy}{d\tau}(U_\tau T_y + U_s S_y) \\ &= \frac{\partial X}{\partial \tau}(U_\tau T_x + U_s S_x) + \frac{\partial Y}{\partial \tau}(U_\tau T_y + U_s S_y) \\ &= U_s(S_x X_\tau + S_y Y_\tau) + U_\tau(T_x X_\tau + T_y Y_\tau) \\ &= U_s \underbrace{\frac{\partial}{\partial \tau} S(X(\tau, s), Y(\tau, s))}_{=s} + U_\tau \underbrace{\frac{\partial}{\partial \tau} T(X(\tau, s), Y(\tau, s))}_{=\tau} \\ &= U_s \frac{\partial s}{\partial \tau} + U_\tau \frac{\partial \tau}{\partial \tau} \\ &= 0 + U_\tau = c(x, y, u(x, y)). \end{aligned}$$

Die Anfangsbedingung ist erfüllt: $u(x_0(s), y_0(s)) = U(\tau, s)|_{\tau=0} = u_0(s)$. ■

Wir betrachten jetzt ein Anfangswertproblem für eine Differentialgleichung in Raum ($n = 1$) und Zeit

$$\begin{aligned} u_t + a(x, t, u)u_x &= c(x, t, u), \\ u(x, 0) &= u_0(x). \end{aligned}$$

In den vorherigen Betrachtungen setzen wir $y = t \in \mathbb{R}^+$ und $b(x, y, u) = b(x, t, u) = 1$ (eventuell nach Division durch $b(x, t, u)$ zu erreichen).

Die Anfangskurve lautet für $x_0(s) = s = x$:

$$K(s) = K(x) = \{(x, 0, u_0(x)), 0 \leq x \leq l\} \quad (2.10)$$

und ist damit der Graph von u_0 über dem Intervall $0 \leq x \leq l$.

Die charakteristischen Differentialgleichungen lauten

$$\frac{dx}{d\tau} = a(x(\tau), \tau, \tilde{u}(\tau)), \quad (2.11)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}, \quad (2.12)$$

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tau} = c(x(\tau), \tau, \tilde{u}(\tau)). \quad (2.13)$$

Die Anfangsbedingung (2.10) kann geschrieben werden, als

$$x(\tau = 0) = x_0, \quad y(\tau = 0) = t(\tau = 0) = 0 \quad (2.14)$$

$$\tilde{u}(0) = u(x_0(0), 0) = u_0(x_0) = u_0(x_0) \quad \text{für } x_0 \in [0, l]. \quad (2.15)$$

Aus (2.12) und der Anfangsbedingung $t(\tau = 0) = 0$ folgt, dass $t = \tau$ ist. (2.11), (2.13) zusammen mit den Anfangsbedingungen (2.14), (2.15) bilden ein Anfangswertproblem für ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen zur Bestimmung der Unbekannten $x = x(t)$ und $\tilde{u} = \tilde{u}(t)$. Durchläuft x_0 das Intervall $[0, l]$, so erhalten wir $\tilde{u}(t) = U(x_0, t)$ und $x(t) = X(x_0, t)$. Eine Auflösung der Beziehung $x(t) = X(x_0, t)$ nach $x_0 = x_0(x, t)$ liefert die Lösung $u(t, x)$.

Beispiel

Wir betrachten ein Anfangswertproblem für eine skalare Erhaltungsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial u} u_x = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad \text{für } (x, t) \in [0, l] \times (0, T], \quad (2.16)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{für } x \in [0, l]. \quad (2.17)$$

Hierbei ist $f = f(u)$ gegeben.

Das Anfangswertproblem für die charakteristischen Differentialgleichungen lautet:

Für jedes $x_0 \in [0, l]$ bestimme Funktionen $x(t)$ und $\tilde{u}(t)$, so dass

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{\partial f(\tilde{u})}{\partial \tilde{u}}, \quad (2.18)$$

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} = 0, \quad (2.19)$$

$$x(0) = x_0, \quad (2.20)$$

$$\tilde{u}(0) = u(x(0), 0) = u_0(x_0). \quad (2.21)$$

Die Lösung von (2.19), (2.21) ist

$$\tilde{u}(t) = U(x_0, t) = \text{const} = u_0(x_0), \quad (2.22)$$

d.h. die Lösung ist konstant entlang der charakteristischen Kurven. $x(t)$ muss nun so bestimmt werden, dass

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \tilde{u}}(u_0(x_0)), \quad x(0) = x_0.$$

Damit ist

$$x(t) = f'(u_0(x_0))t + x_0. \quad (2.23)$$

Ist eine Auflösung nach x_0 möglich, so erhalten wir $u(x, t) = U(x_0, t)$.

Wir fassen diese Überlegungen in einem Lemma zusammen.

Lemma 1 Die Charakteristiken für das Anfangswertproblem (2.16),(2.17) sind Geraden (2.23) durch x_0 mit dem Anstieg $f'(u_0(x_0))$. Jede C^1 -Lösung ist konstant entlang dieser Geraden.

Wir betrachten Beispiele: Sei

a) $f(u) = au, a = \text{const}$

Dies führt zur linearen Advektionsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

die wir als einleitendes Beispiel betrachtet haben.

Das Anfangswertproblem zur Bestimmung von $x(t)$ lautet

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= a, \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Daher ist

$$x(t) = at + x_0, \quad x_0 = x - at.$$

(2.22) liefert die Lösung $u(x, t) = u_0(x - at)$.

b) $f(u) = \frac{1}{2}u^2$.

Dies liefert uns Burgers Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2.24)$$

Sei $u(x, 0) = u_0(x)$.

Wir bestimmen $x(t)$ als Lösung von (2.18), (2.20):

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \tilde{u}(t) = u_0(x_0), \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Es folgt

$$x = x(t) = u_0(x_0)t + x_0, \quad (2.25)$$

d.h. die charakteristischen Kurven $\{(x(t), t)\}$ sind einfach zu berechnen. Durch die Bedingung, dass die Lösung konstant entlang der Charakteristiken ist, kann man den "Transport" charakterisieren.

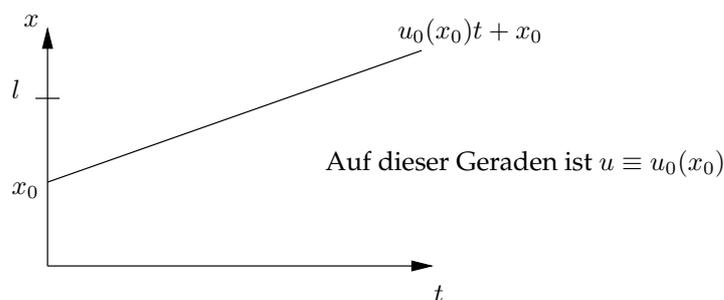


Abbildung 2.4: charakteristische Kurve

Um zu demonstrieren, dass im Allgemeinen nur lokal stetige Lösungen existieren, betrachten wir die Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = \sin \pi x,$$

für Burgers Gleichung (2.24). Nach (2.25) haben die Charakteristiken die Gestalt (siehe Abbildung 2.5)

$$x(t) = x_0 + (\sin \pi x_0)t, \quad x_0 \in [0, 2].$$

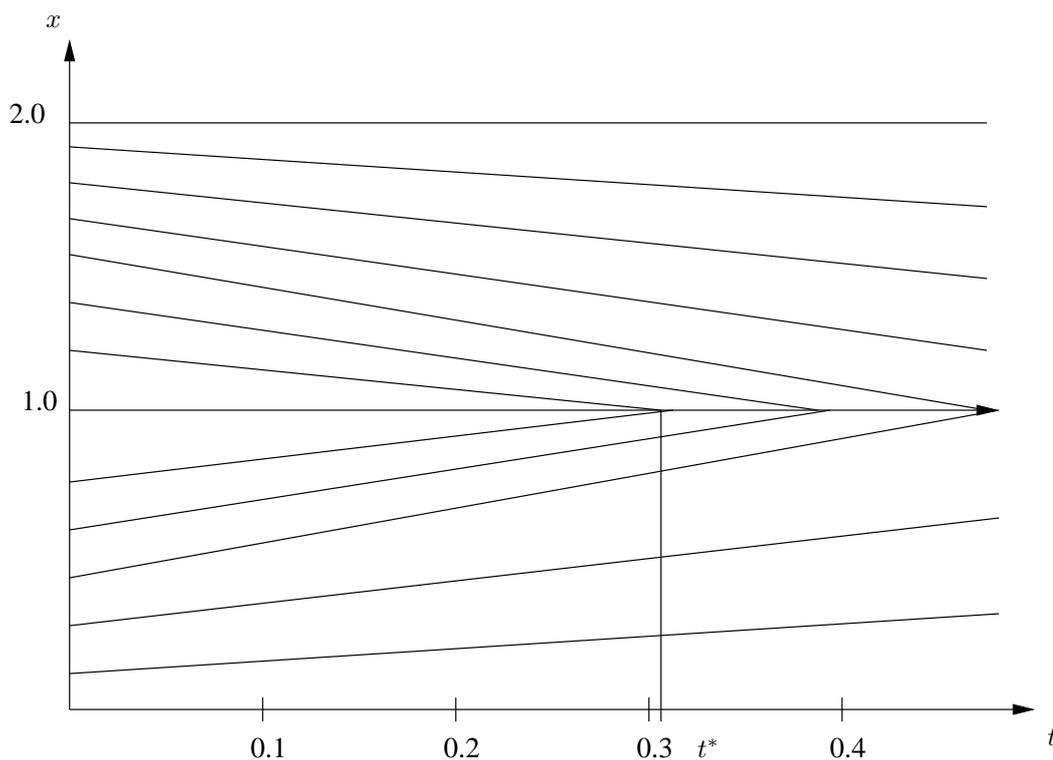


Abbildung 2.5: sich schneidende Charakteristiken

Der Anstieg ist positiv für $0 < x_0 < 1$ und negativ für $1 < x_0 < 2$. Zum Zeitpunkt $t^* = \frac{1}{\pi}$ beginnen sich die Charakteristiken zu schneiden, eine Unstetigkeit entsteht und es gibt mehrere Lösungen. t^* wird dabei folgendermaßen bestimmt. Eine Charakteristik schneidet die Gerade $x(t) \equiv 1$, falls $x_0 + (\sin \pi x_0)t \equiv 1$,

$$t^* = \lim_{x_0 \rightarrow 1} \frac{1 - x_0}{\sin \pi x_0} = \lim_{x_0 \rightarrow 1} \frac{-1}{\pi \cos \pi x_0} = \frac{1}{\pi}.$$

Nur für $t < t^*$ existiert eine klassische Lösung, die durch das Verfolgen der Charakteristiken konstruiert werden kann.

Zum Schluss betrachten wir noch ein Beispiel, dessen Charakteristiken keine Geraden sind.

Es sei

$$\begin{aligned} u_t + x u_x &= 0 && \text{für } x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u_0(x, 0) &= u_0(x) && \text{für } x \in \mathbb{R}, \quad t = 0, \end{aligned} \quad (2.26)$$

und u_0 sei eine differenzierbare Funktion.

Das Anfangswertproblem zur Bestimmung der Charakteristiken lautet:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= x(t), \\ x(0) &= x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Es folgt, dass $x(t) = x_0 e^t$ eine Lösung ist (siehe Abbildung 2.6).

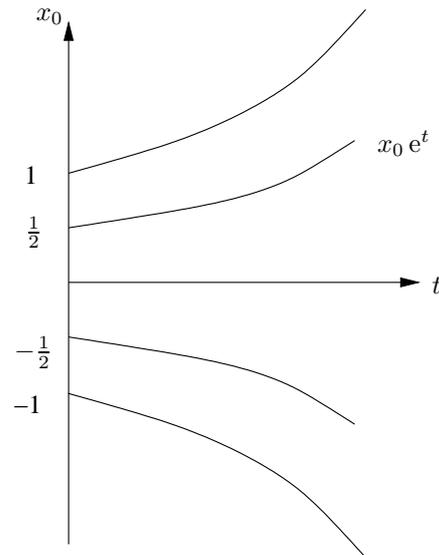


Abbildung 2.6: Charakteristiken zum Problem (2.26), (2.27)

Damit ist

$$x = x_0 e^t = X(x_0, t), \quad (2.27)$$

$$y = t = Y(x_0, t),$$

$$u = U(x_0, t) = \text{const} = u_0(x_0).$$

(2.27) ist nach x_0 auflösbar und wir erhalten

$$u(x, t) = u_0(x_0) = u_0\left(\frac{x}{e^t}\right)$$

als Lösung des Anfangswertproblems (2.26).

2.2 Schwache Lösungen von Erhaltungsgleichungen

Das vorletzte Beispiel zeigte, dass eine nichtlineare Gleichung (Burgers-Gleichung) mit glatten Anfangsdaten ($\sin \pi x$) nach endlicher Zeit ($\frac{1}{\pi}$) Unstetigkeiten entwickelt. Daher wurde ein allgemeinerer Lösungsbegriff eingeführt, der zum Verständnis der Unstetigkeiten führt und eine Grundlage zur numerischen Berechnung von Lösungen liefert. Wir definieren, was wir unter einer schwachen Lösung einer Erhaltungsgleichung für eine Raumvariable $x = x_1$ verstehen.

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad \text{für } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad (2.28)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \quad (2.29)$$

wobei f eine differenzierbare Funktion und $u_0 \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$ ist.

Definition 11 Eine Funktion $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ heißt schwache Lösung des Problems (2.28), (2.29), falls

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left(u \frac{\partial v}{\partial t} + f(u) \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dt = - \int_{-\infty}^\infty u_0(x) v(x, 0) dx \quad (2.30)$$

für alle $v \in C_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ gilt.

Hierbei ist

$$C_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) = \{v \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) : \exists r > 0, \text{ mit } \text{supp } v \in B_r(0,0) \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)\}, \quad (2.31)$$

$$B_r(0,0) = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ : |(x,t)| < r\}. \quad (2.32)$$

$L_{loc}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ ist der lineare Raum aller auf beschränkten Mengen $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ Lebesguemessbaren Funktionen f (genauer der Äquivalenzklassen von f.ü. gleichen Funktionen), die wesentlich beschränkt sind, d.h. $|f(x)| \leq K$ für alle $x \in \Omega \setminus E$, $\mu(E) = 0$.

Der Begriff der schwachen Lösung verallgemeinert den klassischen Lösungsbegriff.

Lemma 2 Ist $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ eine klassische Lösung von (2.28),(2.29), dann ist u auch schwache Lösung.

Beweis

Wir betrachten eine beliebige Funktion $v \in C_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$. Sei r genügend groß, so dass $\text{supp } v \subseteq B_r(0,0) \cap \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Sei $S = \{(x,t) : -r \leq x \leq r, 0 \leq t \leq r\}$, d.h. $\text{supp } v \subset S$. Wir multiplizieren (2.28) mit v und integrieren:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [u_t v + f(u)_x v] dx dt &= \int_S \int [u_t v + f(u)_x v] dx dt = \\ &= \int_S \int [-u v_t - f(u) v_x] dx dt + \int_{-r}^{+r} u(x,t)v(x,t)|_{t=0}^r dx + \int_0^r f(u)v(x,t)|_{x=-r}^{+r} dt \\ &= - \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (u v_t + f(u) v_x) dx dt - \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,0)v(x,0) dx = 0, \end{aligned}$$

da

$$\begin{aligned} v(x,r) &= 0 \quad \text{f.ü. für } -r \leq x \leq r, \\ v(r,t) &= v(-r,t) = 0 \quad \text{f.ü. für } 0 \leq t \leq r, \quad \text{vgl. Abbildung 2.7, ist.} \end{aligned}$$

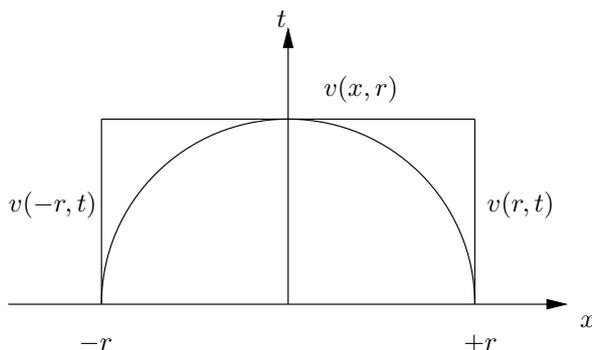


Abbildung 2.7: die Menge S

■

Lemma 2 garantiert, dass schwache Lösungen existieren, falls es stetig differenzierbare klassische Lösungen gibt, siehe auch Satz 2. Wir untersuchen nun, wie sich schwache Lösungen auf einer Unstetigkeitskurve verhalten, die in links- und rechtsseitigen Umgebungen dieser Kurve klassische Lösungen sind.

Die Rankine-Hugoniot Bedingung

Springen schwache, stückweise stetige Lösungen von (2.28) auf einer Unstetigkeitslinie, dann genügen sie dort einer so genannten Rankine-Hugoniot Bedingung (1870, 1887). Wir nehmen an, dass die Unstetigkeitslinie durch eine glatte Kurve $z = \{(t, s(t)), t \in (\alpha, \beta)\}$ gegeben ist, die in der Halbebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ liegt. Mit V_l und V_r bezeichnen wir links- und rechtsseitige Umgebungen von C (siehe Abbildung 2.8).

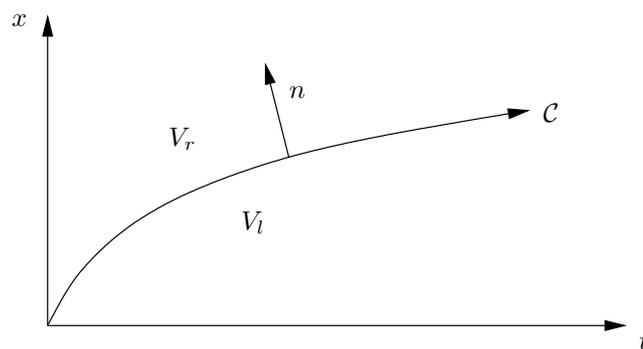


Abbildung 2.8: links- und rechtsseitige Umgebung von C

Satz 3 Eine schwache Lösung u von (2.28), die klassische Lösung in V_l und V_r ist, einen Sprung $[u] = u_r - u_l$ auf C besitzt, wobei u entlang C stetig ist, genügt der Rankine-Hugoniot-Bedingung:

$$f(u_r) - f(u_l) = \dot{s}(u_r - u_l).$$

Hier ist $\dot{s} = \frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit der Kurve C .

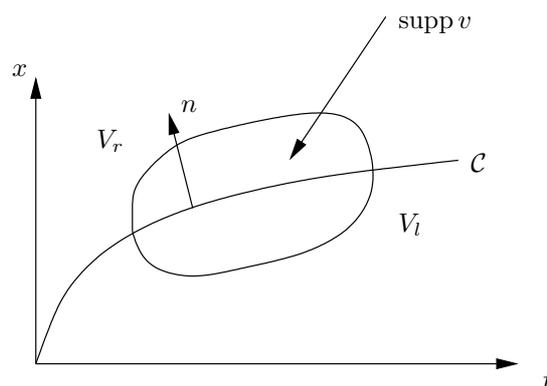


Abbildung 2.9: Träger von v

Beweis [4, 138/139]

Wir wählen eine Testfunktion v mit $\text{supp } v \subset \text{int}(\overline{V_l} \cup \overline{V_r})$, $v(x, 0) = 0$, siehe Abbildung 2.9. Die Relation (2.30) lautet dann:

$$0 = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (uv_t + f(u)v_x) dx dt = \int_{V_l} \int (uv_t + f(u)v_x) dx dt + \int_{V_r} \int (uv_t + f(u)v_x) dx dt.$$

Partielle Integration führt zu

$$\begin{aligned} \int_{V_l} \int [uv_t + f(u)v_x] dx dt &= - \int_{V_l} \int (u_t + f(u)_x) v dx dt + \int_{\mathcal{C}} (u_l n_1 + f(u_l) n_2) v dl \\ &= \int_{\mathcal{C}} (u_l n_1 + f(u_l) n_2) v dl, \end{aligned}$$

da $u_t + f(u)_x = 0$ in V_l ist. Hier ist $\mathbf{n} = (n_1, n_2)^\top$ die Einheitsnormale an die Kurve \mathcal{C} , die von V_l nach V_r zeigt.

Analog gilt

$$\int_{V_r} \int [uv_t + f(u)v_x] dx dt = - \int_{\mathcal{C}} (u_r n_1 + f(u_r) n_2) v dl.$$

Folglich ist

$$0 = \int_{\mathcal{C}} [(u_l - u_r) n_1 + (f(u_l) - f(u_r)) n_2] v dl$$

und daher $(u_l - u_r) n_1 + (f(u_l) - f(u_r)) n_2 = 0$ auf \mathcal{C} , da auf \mathcal{C} Stetigkeit vorausgesetzt wurde.

Weiterhin ist

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{ds}{dt})^2}} \begin{pmatrix} -\frac{ds}{dt} \\ 1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$[u] \dot{s} = [f(u)].$$

$\dot{s} = \frac{ds}{dt}$ wird Geschwindigkeit der Kurve \mathcal{C} genannt, $[u] = u_r - u_l$, $[f(u)] = f(u_r) - f(u_l)$ bezeichnen die Sprünge. ■

Beispiel 1

Wir betrachten Burgers Gleichung

$$u_t + uu_x = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty),$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \leq 0, \\ 1 - x & \text{falls } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{falls } x > 1. \end{cases}$$

Beachte, dass u_0 nur stückweise glatt ist.

Die charakteristischen Kurven haben die Gestalt (siehe Abbildung 2.10)

$$x(t) = u_0(x_0)t + x_0 = \begin{cases} t + x_0 & \text{falls } x_0 \leq 0, \\ (1 - x_0)t + x_0 & \text{falls } 0 < x_0 < 1, \\ x_0 & \text{falls } x_0 > 1. \end{cases}$$

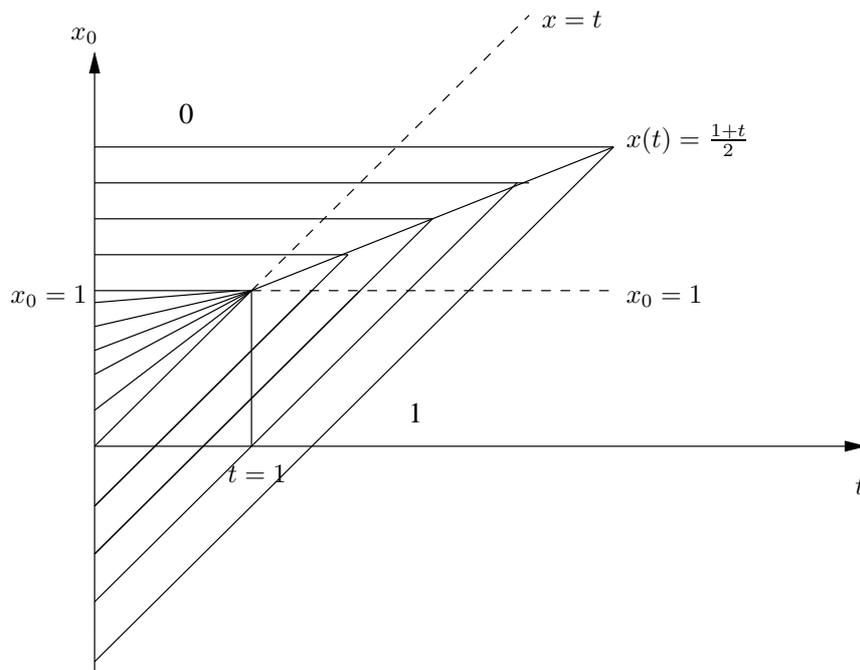


Abbildung 2.10: sich kreuzende Charakteristiken zu Beispiel 1

Bis zum Zeitpunkt $t = 1$ existiert eine eindeutige, stetige Lösung, dann kreuzen sich die Charakteristiken.

Für $t \leq 1$ lautet die Lösung

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq t, 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{1-x}{1-t} & \text{für } t \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{für } x \geq 1, 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Im Bereich $t \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1$ gilt nämlich: Die Lösung der charakteristischen Gleichung

$$x(t) = X(t, x_0) = (1 - x_0)t + x_0 = t - x_0 t + x_0 = t + x_0(1 - t)$$

kann nach x_0 aufgelöst werden:

$$x_0 = \frac{x - t}{1 - t}.$$

Damit wird $u(x, t) = U(x_0, t) = u_0(x_0) = 1 - x_0 = 1 - \frac{x-t}{1-t} = \frac{1-x}{1-t}$.

Für $t > 1$ definieren wir eine Lösung, die der Rankine-Hugoniot Bedingung genügt. Dazu ziehen wir eine Mittellinie $\mathcal{C} = \{(t, \frac{1+t}{2} = s(t))\}$ und setzen

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < s(t), t > 1, \\ 0 & \text{für } x > s(t), t > 1. \end{cases}$$

Für diese Lösung gilt:

$$u_r = 0, \quad u_l = 1, \quad f(u_r) = \frac{1}{2}u_r^2 = 0, \quad f(u_l) = \frac{1}{2}u_l^2 = \frac{1}{2}$$

und somit

$$-[u]\dot{s} = (u_l - u_r)\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = -[f(u)] = f(u_l) - f(u_r).$$

Man spricht in diesem Fall auch von einer Schockwelle, die sich entlang der Kurve \mathcal{C} formiert.

Wir betrachten nun ein weiteres Beispiel, das zeigt, dass aus dem Erfülltsein der Rankine-Hugoniot Bedingung nicht notwendig die Eindeutigkeit der Lösung folgt.

Beispiel 2

Wir betrachten Burgers Gleichung mit den Anfangsdaten

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{für } x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Die charakteristischen Kurven werden beschrieben durch

$$x(t) = u_0(x_0)t + x_0 = \begin{cases} x_0 & \text{für } x_0 < 0, \\ t + x_0 & \text{für } x_0 > 0. \end{cases}$$

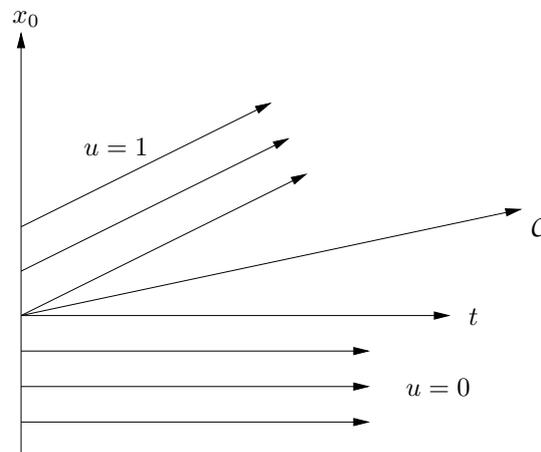


Abbildung 2.11: Charakteristiken zu Beispiel 2

Damit ist

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > t, \\ 0 & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

siehe Abbildung 2.11.

Wir haben keine Information im Keil $0 < x < t$. Wir führen wieder die Mittellinie $\mathcal{C} = \{(t, \frac{1}{2}t = s(t))\}$ ein und definieren

$$u_1(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < \frac{t}{2}, \\ 1 & \text{für } x > \frac{t}{2}. \end{cases}$$

u_1 genügt außerhalb der Kurve \mathcal{C} Burgers Gleichung und der Rankine-Hugoniot Bedingung. In diesem Fall haben wir eine nicht physikalische Schockwelle eingeführt.

Wir können jedoch den Keil ($0 < x < t$) auch stetig auffüllen durch einen Verdünnungsfächer (siehe Abbildung 2.12), in dem wir definieren:

$$u_2(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > t, \\ \frac{x}{t} & \text{für } 0 < x < t, \\ 0 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Auf den Geraden $x = at$ ist $u = a = \frac{x}{t}$.

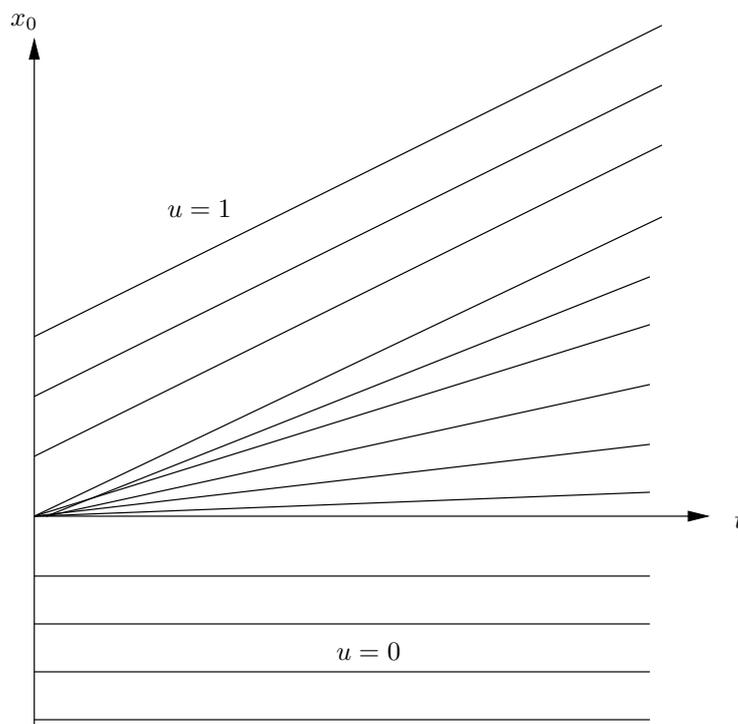


Abbildung 2.12: Verdünnungsfächer

$u_2(x, t)$ genügt der Burgers-Gleichung im Bereich $0 < x < t$ und der Rankine-Hugoniot Bedingung (kein Sprung).

Wir haben gesehen, dass die Rankine-Hugoniot Bedingung eine notwendige Bedingung für schwache Lösungen des Problems (2.28),(2.29) ist, jedoch keine Eindeutigkeit garantiert. Wir werden jetzt eine zusätzliche Bedingung formulieren, die die Existenz schwacher Lösungen sichert.

Entropie-Bedingung

Wir nehmen zusätzlich an, dass f gleichmäßig konvex ist, d.h. $f''(u) \geq \text{const} > 0$. Dann ist f' strikt anwachsend und $(f')^{-1} = g$ existiert. Die Existenz der inversen Funktion $(f')^{-1}$ kann genutzt werden, um eine schwache Lösung von Problem (2.28), (2.29) mit Hilfe der Lax-Oleinik-Formel zu konstruieren:

$$u(x, t) = (f')^{-1}\left(\frac{x - x_0(x, t)}{t}\right). \quad (2.33)$$

wobei $x_0(x, t)$ eine nicht abnehmende Funktion bezüglich x ist. Für diese Lösung ist eine Entropie-Bedingung erfüllt:

$$u(x + z, t) - u(x, t) \leq \frac{c}{t}z \quad \forall t > 0, x, z \in \mathbb{R}, z > 0, \quad (2.34)$$

wobei c eine Konstante ist.

Es gilt folgendes Ergebnis

Satz 4 [4, S.148,149]

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ glatt und gleichmäßig konvex, $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Dann existiert eine schwache Lösung (2.33) des Problems (2.28), (2.29). Für diese gilt die Entropie-Bedingung (2.34).

Wir führen jetzt folgende Definition ein:

Definition 12 [4, S. 150] Eine schwache Lösung $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{aligned} \quad (2.35)$$

ist eine Entropie-Lösung, falls eine Konstante $C \geq 0$ existiert, so dass

$$u(x + z, t) - u(x, t) \leq C\left(1 + \frac{1}{t}\right)z \quad (2.36)$$

für fast alle $x, z \in \mathbb{R}, z > 0, t > 0$ gilt.

Satz 5 (Eindeutigkeit von Entropie-Lösungen) [4, S. 151]

Sei f konvex und glatt. Dann existiert höchstens eine schwache Entropie-Lösung von (2.35).

Beispiel

Wir betrachten das folgende Riemann Problem für die Burgers Gleichung:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= 0 \quad \text{für } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) &= \begin{cases} u_l & \text{falls } x < 0, \\ u_r & \text{falls } x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

1. Fall: $u_l > u_r$

Wir betrachten die Lösung

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & \text{falls } \frac{x}{t} < \dot{s}, \\ u_r & \text{falls } \frac{x}{t} > \dot{s}, \end{cases}$$

wobei $\dot{s} = \frac{f(u_r) - f(u_l)}{u_r - u_l} = \frac{\frac{u_r^2}{2} - \frac{u_l^2}{2}}{u_r - u_l} = \frac{1}{2}(u_r + u_l)$ ist.

Die konstanten Lösungen sind durch eine Schockwelle voneinander getrennt.

Die Bedingung (2.34) ist erfüllt da,

$$u(x + z, t) - u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{für } \dot{s} < \frac{x}{t} \text{ und } \frac{x}{t} < \dot{s} - \frac{z}{t}, \\ u_r - u_l < 0 & \text{für } \dot{s} - \frac{z}{t} < \frac{x}{t} < \dot{s}. \end{cases}$$

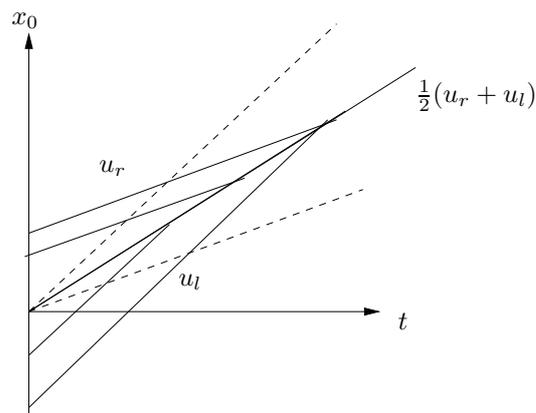


Abbildung 2.13: Charakteristiken im 1. Fall

2. Fall: $u_l < u_r$

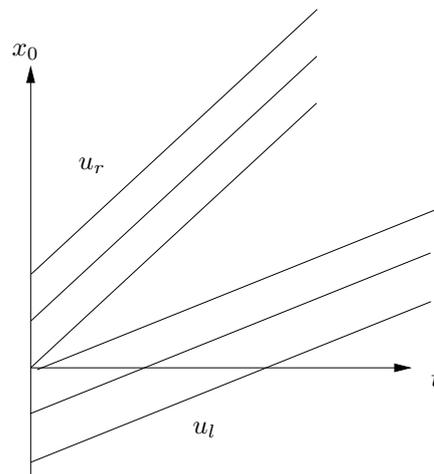


Abbildung 2.14: Charakteristiken zum 2. Fall

Wir betrachten wie im vorherigen Fall einen Verdünnungsfächer und setzen

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & \text{für } \frac{x}{t} < u_l, \\ \frac{x}{t} & \text{für } u_l < \frac{x}{t} < u_r, \\ u_r & \text{für } u_r < \frac{x}{t}. \end{cases}$$

Auch hier ist die Entropie-Bedingung (2.34) erfüllt. Es gilt nämlich folgendes (siehe Abbildung 2.15):

Für $\frac{x}{t} > u_r, \frac{x+z}{t} < u_l$ gilt

$$u(x+z, t) - u(x, t) = 0.$$

Für $\frac{x}{t} < u_l, \frac{x+z}{t} > u_r$ (Gebiet I) gilt

$$u(x+z, t) - u(x, t) = u_r - u_l \leq \frac{x+z}{t} - \frac{x}{t} = \frac{z}{t}.$$

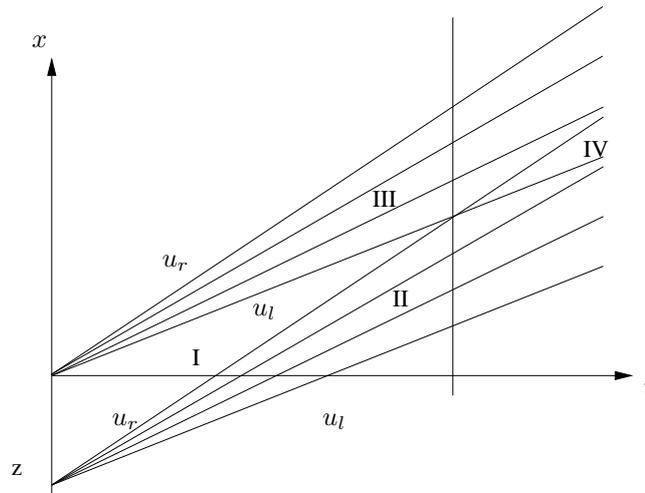


Abbildung 2.15: Verdünnungsfächer

Für $\frac{x}{t} < u_l, u_l \leq \frac{x+z}{t} < u_r$ (Gebiet II) gilt

$$u(x+z, t) - u(x, t) = \frac{x+z}{t} - u_l \leq \frac{x+z}{t} - \frac{x}{t} = \frac{z}{t}.$$

Für $\frac{x+z}{t} > u_r, u_l < \frac{x}{t} < u_r$ (Gebiet III) gilt

$$u(x+z, t) - u(x, t) = u_r - \frac{x}{t} < \frac{x+z}{t} - \frac{x}{t} = \frac{z}{t}.$$

Für $u_r < \frac{x+z}{t} < u_r, u_l < \frac{x}{t} < u_r$ (Gebiet IV) gilt

$$u(x+z, t) - u(x, t) = \frac{x+z}{t} - \frac{x}{t} = \frac{z}{t}.$$

Kapitel 3

Differentialgleichungen zweiter Ordnung

3.1 Typeinteilung

Wir betrachten semilineare Differentialgleichungen 2. Ordnung im \mathbb{R}^n , in denen die 2. Ableitungen linear auftreten:

$$\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(\mathbf{x}) D^\alpha u(\mathbf{x}) + F(\mathbf{x}, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

In der Indexschreibweise lautet diese:

$$\sum_{j,k=1}^n A_{jk}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + F(\mathbf{x}, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = 0. \quad (3.1)$$

Als Hauptteil bezeichnet man den Ausdruck:

$$\sum_{j,k=1}^n A_{jk}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}. \quad (3.2)$$

Wir suchen Lösungen mit der Eigenschaft, dass $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}$ ist. Daher können wir annehmen, dass $A_{jk}(\mathbf{x}) = A_{kj}(\mathbf{x})$ ist. Die symmetrische Koeffizientenmatrix des Hauptteils

$$A(\mathbf{x}) = (A_{jk}(\mathbf{x}))$$

besitzt nur reelle Eigenwerte. Eine Klassifikation wird nach den Vorzeichen der Eigenwerte von $A(\mathbf{x})$ vorgenommen.

Klassifikation

Definition 13 Die Differentialgleichung (3.1) ist im Punkt $\mathbf{x} \in \Omega$ vom Typ (α, β, γ) , falls die Koeffizientenmatrix $A(\mathbf{x})$, α -positive Eigenwerte, β -negative Eigenwerte und γ -Null-Eigenwerte besitzt. Gleichungen vom Typ

- $(n, 0, 0)$ bzw. $(0, n, 0)$ sind elliptisch im Punkt \mathbf{x} (d.h. alle Eigenwerte sind nicht Null und haben dasselbe Vorzeichen).
- $(n-1, 0, 1)$ bzw. $(0, n-1, 1)$ sind parabolisch im Punkt \mathbf{x} (oder etwas allgemeiner, mindestens ein Eigenwert muss gleich Null sein).
- $(n-1, 1, 0)$ bzw. $(1, n-1, 0)$ sind hyperbolisch im Punkt \mathbf{x} (alle Eigenwerte sind ungleich Null und haben bis auf einen Eigenwert dasselbe Vorzeichen).

Bemerkung

Eine zur Definition 13 äquivalente ist folgende.

Sei

$$Q(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{j,k=1}^n A_{jk}(\mathbf{x}) \xi_j \xi_k$$

die formal zum Hauptteil (3.2) zugeordnete quadratische Form im Punkt x und

$$Q^*(\eta_1, \dots, \eta_m) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(\mathbf{x}) \eta_i^2 \quad (3.3)$$

die durch die Hauptachsentransformation gewonnene Form. Dann wird der Typ (α, β, γ) der Gleichung (3.1) im Punkt \mathbf{x} durch die Anzahl der positiven, negativen und verschwindenden Koeffizienten $\lambda_i(\mathbf{x})$ der Form (3.3) bestimmt.

Bemerkung

Der Typ kann im Gebiet Ω wechseln. Die Gleichung (3.1) wird vom Typ (α, β, γ) in Ω genannt, falls sie vom Typ (α, β, γ) für alle $\mathbf{x} \in \Omega$ ist. Besitzt der Hauptteil konstante Koeffizienten, dann ist (3.1) im \mathbb{R}^n vom gleichen Typ.

Zweidimensionaler Fall

Im zweidimensionalen Fall, $\mathbf{x} = (x, y) = (x_1, x_2)$, lautet (3.1):

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0. \quad (3.4)$$

In diesem Fall ist die Typeinteilung besonders einfach.

Lemma 3 Sei $D(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y)$. Die Differentialgleichung (3.4) ist im Punkt (x, y) für

$$D(x, y) \begin{cases} < 0 & \text{elliptisch} \\ = 0 & \text{parabolisch} \\ > 0 & \text{hyperbolisch.} \end{cases}$$

Beweis

Die Matrix des Hauptteils ist

$$A(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & c(x, y) \end{pmatrix}.$$

Ihre Eigenwerte sind die Nullstellen λ von

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a + c)\lambda - D = 0.$$

Nach dem Wurzelsatz von Vieta ist $\lambda_1 \lambda_2 = -D$. Daraus folgt die Behauptung. ■

Beispiele

- Wir betrachten die Laplace Gleichung

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n).$$

Da

$$A(\mathbf{x}) = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist, liegt eine elliptische Differentialgleichung im \mathbb{R}^n vor.

- Die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}, t)$$

mit

$$A(\mathbf{x}) = A = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -a^2 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & -a^2 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

ist eine parabolische Differentialgleichung im \mathbb{R}^n .

- Für die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}, t)$$

gilt

$$A(\mathbf{x}) = A = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -a^2 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & -a^2 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Daher liegt eine hyperbolische Differentialgleichung im \mathbb{R}^n vor.

Definition 14 (Normalform) Eine Gestalt einer Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem linearen Hauptteil mit konstanten Koeffizienten und ohne gemischte Ableitungen heißt Normalform.

Im Fall $n = 2$ gibt es globale Variablen-Transformationen in den Bereichen, in denen sich der Typ nicht ändert, die zur Normalform führen. Liegen konstante Koeffizienten vor, dann kann ebenfalls für mehr als zwei Variable durch eine Variablentransformation eine Normalform erhalten werden.

Definition 15 Eine Transformation $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt zulässig in Ω , wenn sie eindeutig, zweimal differenzierbar ist und ihre Jakobische Funktionaldeterminante nicht verschwindet, d.h.:

$$T\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}),$$

$$\det J(T) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Satz 6 Der Typ der partiellen Differentialgleichung (3.1) ändert sich nicht bei einer zulässigen Variablentransformation.

Beweis

Für einen festen Punkt \mathbf{x} kann $A(\mathbf{x})$ in eine Diagonalform transformiert werden,

$$A(\mathbf{x}) = A = HDH^T.$$

Durch die Zulässigkeit der Transformation $T\mathbf{x} = \mathbf{y}$ ist eine lokale Auflösbarkeit nach \mathbf{x} gesichert:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y}).$$

Sei $u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}(\mathbf{y})) = w(\mathbf{y})$. Dann gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial w}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 w}{\partial y_l \partial y_k} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial w}{\partial y_l} \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Ersetzen der 2. Ableitungen in (3.1) führt auf einen transformierten Hauptteil mit der Koeffizientenmatrix

$$\tilde{A} = \tilde{A}(\mathbf{y}) = JAJ^T.$$

Damit ist $\tilde{A} = JHDH^T J^T = JHD(JH)^T$. ■

Satz 7 Die lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\sum_{i,j} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = 0 \quad (3.5)$$

kann in

$$\begin{aligned} \Delta_n v + \tilde{c}v &= 0 && \text{im elliptischen Fall,} \\ \Delta_{n-1} v - v_{y_n y_n} + \tilde{c}v &= 0 && \text{im hyperbolischen Fall,} \\ \Delta_{n-1} v - b v_{y_n} + \tilde{c}v &= 0 && \text{im parabolischen Fall} \end{aligned}$$

transformiert werden.

Beweis

Seien λ_i die Eigenwerte der Matrix A und e_i die entsprechenden Eigenvektoren, die die Matrix H bilden. Mit $\mathbf{y} = H^T \mathbf{x}$ erhalten wir aus (3.5) für $u(\mathbf{x}) = w(\mathbf{y})$:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i w_{y_i y_i} + \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i w_{y_i} + c w = 0.$$

Wir wollen λ_i in ± 1 bzw. 0 überführen. Dazu setzen wir

$$\mathbf{z} = C \mathbf{y}, \quad \text{wobei } C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & c_n \end{pmatrix}$$

ist, so dass $z_i = c_i y_i$ ist.

Für

$$w(\mathbf{y}) = \hat{w}(\mathbf{z})$$

gilt:

$$\lambda_i w_{y_i y_i} = \lambda_i c_i^2 \hat{w}_{z_i z_i}.$$

Mit

$$c_i = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} & \text{für } \lambda_i > 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-\lambda_i}} & \text{für } \lambda_i < 0, \\ 1 & \text{für } \lambda_i = 0 \end{cases}$$

folgt:

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \hat{w}_{z_i z_i} + \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i \hat{w}_{z_i} + c \hat{w} = 0, \quad (3.6)$$

wobei $\varepsilon_i \in \{1, -1, 0\}$.

Im Fall $\lambda_i = 0$ kann c_i beliebig gewählt werden, hier wurde $c_i = 1$ gesetzt. Um die ersten Ableitungen zu eliminieren machen wir den Ansatz

$$\hat{w}(z) = e^{\sum_{k=1}^n \alpha_k z_k} v(z), \quad \alpha_k \text{ beliebig.}$$

Da

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{w}(z)}{\partial z_i} &= e^{\sum_{k=1}^n \alpha_k z_k} \left(\frac{\partial v}{\partial z_i} + \alpha_i v \right), \\ \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial z_i^2} &= e^{\sum_{k=1}^n \alpha_k z_k} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z_i^2} + 2\alpha_i \frac{\partial v}{\partial z_i} + \alpha_i^2 v \right), \end{aligned}$$

wird aus (3.6)

$$e^{\sum_{k=1}^n \alpha_k z_k} \left[\sum_{i=1}^n \varepsilon_i v_{z_i z_i} + \sum_{i=1}^n (2\alpha_i \varepsilon_i + \tilde{b}_i) v_{z_i} + \left(c + \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \varepsilon_i + \alpha_i \tilde{b}_i \right) v \right] = 0.$$

1. Elliptischer Fall: Alle ε_i haben das gleiche Vorzeichen. Setzen wir

$$\alpha_i = -\frac{\tilde{b}_i}{2\varepsilon_i},$$

dann verschwinden die ersten Ableitungen.

2. Hyperbolischer Fall: Da $\varepsilon_i \neq 0$ für alle i ist, liefert das obige Vorgehen ebenfalls die Behauptung.

3. Parabolischer Fall: Sei $\varepsilon_n = 0, \varepsilon_i \neq 0$ für $i = 1, \dots, n-1$. In diesem Fall bleibt nur eine erste Ableitung erhalten. ■

Satz 8 (n=2) Es gibt zulässige Transformationen $\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y)$ (durch charakteristische Kurven beschrieben), die Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten in folgende Normalformen überführen:

$$\left. \begin{aligned} w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta} + \tilde{\phi}(\xi, \eta, w, w_\xi, w_\eta) &= 0 && \text{im elliptischen Fall,} \\ w_{\xi\eta} + \tilde{\phi}(\xi, \eta, w, w_\xi, w_\eta) &= 0 && \text{im hyperbolischen Fall,} \\ w_{\xi\xi} - w_{\eta\eta} + \tilde{\phi}(\xi, \eta, w, w_\xi, w_\eta) &= 0 && \text{im parabolischen Fall.} \end{aligned} \right\}$$

Beweis

Sei $u(x, y) = w(\xi, \eta)$. Die Differentialgleichung

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \phi(u, u_x, u_y, x, y) = 0$$

wird nach der Variablentransformation folgende Gestalt haben

$$\tilde{A}(\xi, \eta) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + 2\tilde{B}(\xi, \eta) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \tilde{C}(\xi, \eta) \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \tilde{\phi}(w, w_\xi, w_\eta, \xi, \eta) = 0,$$

wobei

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\xi, \eta) &= A(x, y)\xi_x^2 + 2B(x, y)\xi_x\xi_y + C(x, y)\xi_y^2, \\ \tilde{B}(\xi, \eta) &= A(x, y)\eta_x\xi_x + B(x, y)[\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x] + C(x, y)\xi_y\eta_y, \\ \tilde{C}(\xi, \eta) &= A(x, y)\eta_x^2 + 2B(x, y)\eta_x\eta_y + C(x, y)\eta_y^2 \end{aligned}$$

sind.

Setzen wir voraus, dass $A \neq 0$ ist, so gilt:

$$\tilde{A} = A(\xi_x - \mu_1\xi_y)(\xi_x - \mu_2\xi_y), \quad (3.7)$$

$$\tilde{C} = A(\eta_x - \mu_1\eta_y)(\eta_x - \mu_2\eta_y), \quad (3.8)$$

mit

$$\mu_1 = \mu_1(x, y) = \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \quad \mu_2 = \mu_2(x, y) = \frac{-B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}.$$

Hyperbolischer Fall

Es ist $B^2 - AC > 0$ und μ_1, μ_2 sind reelle Funktionen. Unser Ziel ist $\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y)$ so zu bestimmen, dass $\tilde{A} = \tilde{C} = 0$ ist. Wir setzen

$$\begin{aligned} \xi_x - \mu_1(x, y)\xi_y &= 0, \\ \eta_x - \mu_2(x, y)\eta_y &= 0. \end{aligned}$$

Dies sind zwei partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung zur Bestimmung von ξ und η . Die charakteristischen Kurven werden durch die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dx} = -\mu_1(x, y), \quad (3.9)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\mu_2(x, y) \quad (3.10)$$

beschrieben (wähle in (2.4) $x = \tau$ als Parameter). Auf $\tilde{C} = (x, y(x))$ sind die Lösungen $\xi(x, y) = \text{const} = C_1$ bzw. $\eta(x, y) = \text{const} = C_2$. Die in den Lösungen von (3.9) bzw. (3.10) auftretenden Konstanten C_1 bzw. C_2 sind daher als Funktionen von x und y ausdrückbar. Dies führt zu

$$2\tilde{B}w_{\xi\eta} + \tilde{\phi}(w, w_{\xi}, w_{\eta}, \xi, \eta) = 0.$$

Durch nochmalige Transformation

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \tilde{\eta} = \frac{\xi - \eta}{2} \quad (\xi = \tilde{\xi} + \tilde{\eta}, \eta = \tilde{\xi} - \tilde{\eta})$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \hat{A}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) &= 2\tilde{B}(\xi, \eta)\tilde{\xi}_{\tilde{\xi}}\tilde{\xi}_{\tilde{\eta}} = \frac{1}{2}\tilde{B}(\xi, \eta), \\ \hat{B}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) &= \tilde{B}(\xi, \eta)[\tilde{\xi}_{\tilde{\xi}}\tilde{\eta}_{\tilde{\eta}} + \tilde{\xi}_{\tilde{\eta}}\tilde{\eta}_{\tilde{\xi}}] = 0, \\ \hat{C}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) &= 2\tilde{B}(\xi, \eta)\tilde{\eta}_{\tilde{\xi}}\tilde{\eta}_{\tilde{\eta}} = -\frac{1}{2}\tilde{B}(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Nach Division durch $\hat{A}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ folgt für $\tilde{w}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = w(\xi, \eta)$

$$\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{\xi}^2} - \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{\eta}^2} + \tilde{\phi}(\tilde{w}, \tilde{w}_{\tilde{\xi}}, \tilde{w}_{\tilde{\eta}}) = 0.$$

Parabolischer Fall

Wir bestimmen ξ und η so, dass $\tilde{C} = \tilde{B} = 0$ ist. Da $AC - B^2 = 0$, folgt $\mu_1 = \mu_2 = -\frac{B}{A}$, vorausgesetzt $A \neq 0$. Weiterhin ist:

$$\tilde{C} = A(\eta_x - \mu_1\eta_y)^2 = 0,$$

falls

$$\eta_x - \mu_1\eta_y = 0.$$

Daraus erhalten wir $\eta(x, y) = c_1$ und setzen (willkürlich!) $\xi(x, y) = x$. Für \tilde{B} muss bei jeder zulässigen Transformation gelten $\tilde{A}\tilde{C} - \tilde{B}^2 = 0$. Eine zulässige Transformation liegt vor, wenn gilt:

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \eta_x \\ 0 & \eta_y \end{vmatrix} = \eta_y \neq 0.$$

Da

$$\tilde{A}(\xi, \eta) = A(x, y) \text{ und } A(x, y) \neq 0$$

folgt:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \tilde{\phi}(w, w_{\xi}, w_{\eta}) = 0.$$

Elliptischer Fall

Unser Ziel ist, ξ und η so zu bestimmen, dass $\tilde{B} = 0$ und $\tilde{A} = \tilde{C}$ sind. Da $B^2 - AC < 0$ ist, wird μ_1 komplex sein und $\mu_2 = \overline{\mu_1}$. Die Gleichungen

$$\tilde{A} = A(\xi_x - \mu_1 \xi_y)(\xi_x - \overline{\mu_1} \xi_y) = A(\eta_x - \mu_1 \eta_y)(\eta_x - \overline{\mu_1} \eta_y) = \tilde{C}$$

sind erfüllt, falls

$$\xi_x - \mu_1 \xi_y = -i(\eta_x - \mu_1 \eta_y) \quad (3.11)$$

ist; man beachte:

$$\xi_x - \overline{\mu_1} \xi_y = i(\eta_x - \overline{\mu_1} \eta_y).$$

Aus (3.11) folgt mit

$$\mu_1 = \frac{-B + i\sqrt{AC - B^2}}{A}, \quad \overline{\mu_1} = \frac{-B - i\sqrt{AC - B^2}}{A},$$

$$A\xi_x + B\xi_y = -\sqrt{AC - B^2}\eta_y, \quad A\eta_x + B\eta_y = \sqrt{AC - B^2}\xi_y$$

und schließlich $\tilde{B} = 0$. Die Beziehung (3.11) können wir als komplexe Differentialgleichung schreiben

$$\xi_x + i\eta_x - \mu_1(\xi_y + i\eta_y) = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \mu_1 \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad v = \xi + i\eta = v(x, y).$$

Dies führt auf eine komplexe charakteristische Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = -\mu_1$$

und auf eine komplexe Lösung

$$v(x, y(x)) = \text{const.}$$

Als neue Koordinaten wählen wir

$$\begin{aligned} \xi(x, y) &= \operatorname{Re} v(x, y) = \text{const.}, \\ \eta(x, y) &= \operatorname{Im} v(x, y) = \text{const.} \end{aligned}$$

Dies ist eine zulässige Transformation, da

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{AC - B^2}} \tilde{A} \neq 0.$$

■

Beispiele

1. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Da $AC - B^2 = 2 - 1 > 0$, liegt eine elliptische Differentialgleichung vor.

Mit $\mu_1 = -\frac{B}{A} + i\frac{\sqrt{AC - B^2}}{A} = 1 + i$ lautet die charakteristische Differentialgleichung:

$$\frac{dy}{dx} = -1 - i.$$

Deren Lösung ist $y = -x - ix + \overline{const}$, was zu

$$y + x + ix = \overline{const} = v(x, y),$$

$$\xi(x, y) = y + x,$$

$$\eta(x, y) = x$$

führt. Damit wird $\tilde{A} = \tilde{C} = 1$ und $w = w(\xi, \eta) = u(x, y)$ genügt der Laplacegleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = 0.$$

2. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 6 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Da $AC - B^2 = 3 - 4 = -1 < 0$ ist, liegt eine hyperbolische Differentialgleichung vor.

Mit $\mu_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} = 2 \pm 1$ erhalten wir die charakteristischen Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dx} = -3,$$

$$\frac{dy}{dx} = -1,$$

woraus $y + 3x = c_1, y + x = c_2$ folgt. Die neuen Koordinaten sind damit

$$\xi = y + 3x,$$

$$\eta = y + x.$$

Nach der Variablensubstitution wird

$$\tilde{A} = \tilde{C} = 0, \quad 2\tilde{B} = -4$$

und schließlich für

$$w = w(\xi, \eta) = u(x, y),$$

$$-4w_{\xi\eta} + 4w_{\eta} = 0,$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - 1 \right) w(\xi, \eta) = 0.$$

Schrittweise Integration liefert

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (e^{\xi} f(\eta)) = 0,$$

$$w(\xi, \eta) = F(\eta)e^{\xi} + H(\xi),$$

$$u(x, y) = F(y + x)e^{y+3x} + H(y + 3x),$$

wobei H und F beliebige differenzierbare Funktionen sind.

3.2 Die Fouriermethode

1822 hat Jean Baptiste Joseph de Fourier (1768-1830) das Buch *Théorie analytique du la chaleur* veröffentlicht. Darin wird eine Methode zur Behandlung von Rand-Anfangswertproblemen vorgeschlagen, die auf einem Separationsansatz beruht und die Lösung in Form von Reihen (Fourierreihen) darstellt. Die Entwicklung der Lösung in eine Reihe wird nach einem orthogonalen System von Eigenfunktionen eines elliptischen Randwertproblems vorgenommen. Deren Koeffizienten sind zeitabhängig und realisieren die Anfangsdaten.

Wesentlich ist dabei, dass die Konvergenz der Reihe gesichert ist, und dass diese eine Lösung des Ausgangsproblems darstellt. Wir beginnen, Randwertprobleme für die Laplace Gleichung mit dieser Methode zu lösen.

3.2.1 Randwertprobleme für die Laplace Gleichung

Wir betrachten zunächst Randwertprobleme für die Laplace Gleichung im Kreis.

Gesucht ist eine Funktion $\tilde{u}(\mathbf{x}) = \tilde{u}(x_1, x_2)$, welche in einem Kreis

$$Br_0(0) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = r < r_0\}$$

der Laplace-Gleichung genügt und auf dem Rand vorgegebene Werte annimmt.

$$\Delta \tilde{u} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_2^2} = 0 \quad \text{für } (x_1, x_2) \in Br_0(0), \quad (3.12)$$

$$\tilde{u} = \tilde{g}_1 \quad \text{auf } \partial Br_0(0) \quad (\text{Dirichlet Problem}), \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \mathbf{n}} = \tilde{g}_2 \quad \text{auf } \partial Br_0(0) \quad (\text{Neumann Problem}). \quad (3.14)$$

Wir schreiben dieses Randwertproblem in Polarkoordinaten:

Gesucht ist eine Funktion $u = u(r, \phi) = \tilde{u}(x_1, x_2)$, so dass gilt:

$$\Delta \tilde{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \quad \text{für } r < r_0, \quad (3.15)$$

$$u(r, \phi) = g_1(\phi) \quad \text{für } r = r_0, \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r, \phi) = g_2(\phi) \quad \text{für } r = r_0. \quad (3.17)$$

Satz 9 Seien g_1 und g_2 2π -periodische Funktionen aus $L_2(0, 2\pi)$, deren Fourierreihen bzgl. des orthonormierten trigonometrischen Funktionssystems punktweise g_1 bzw. g_2 darstellen. Dann ist

$$\tilde{u}(x_1, x_2) = u(r, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_1(\psi) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{r_0^n} \cos n(\psi - \phi) \right] d\psi \quad (3.18)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_1(\psi) \left(\frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r \cos(\psi - \phi)} \right) d\psi \quad (3.19)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r_0} \int_{|\mathbf{y}|=r_0} \tilde{g}_1(\mathbf{y}) \frac{r_0^2 - |\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} d\sigma_{\mathbf{y}} \quad (3.20)$$

die eindeutig bestimmte Lösung des Dirichlet Problems. Hierbei ist $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$.

Gilt für g_2 die Lösbarkeitsbedingung

$$\int_0^{2\pi} g_2(\phi) d\phi = 0,$$

dann ist

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}(x_1, x_2) = u(r, \phi) &= C + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_2(\psi) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{nr_0^{n-1}} \cos n(\psi - \phi) \right] d\psi \\
 &= C + \frac{r_0}{\pi} \int_0^{2\pi} g_2(\psi) \ln \left(\frac{1}{[r_0^2 + r^2 - 2r_0r \cos(\psi - \phi)]^{\frac{1}{2}}} \right) d\psi \\
 &= C + \frac{1}{\pi} \int_{|\mathbf{y}|=r_0} \tilde{g}_2(\mathbf{y}) \ln \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) d\sigma_{\mathbf{y}} \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

die bis auf eine Konstante eindeutig bestimmte Lösung des Neumann Problems. Die Formel (3.20) heißt Poissonformel, (3.21) heißt Dirichlet Formel.

Bemerkung

Die folgende Dirichlet Bedingung sichert die punktweise Konvergenz der Fourierreihe einer Funktion $f \in L_2(0, 2\pi)$.

- (a) Lässt sich der Definitionsbereich von f in endlich viele Intervalle zerlegen, in denen die Funktion stetig und monoton ist,
- (b) die Grenzwerte $f(x+0), f(x-0)$ existieren,

dann konvergiert die Fourierreihe von f punktweise in den Stetigkeitsstellen und an den Unstetigkeitsstellen zum Grenzwert $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. Eine Verschärfung wäre die Bedingung: Ist f stetig und f' stückweise stetig im Intervall $[0, 2\pi]$, dann konvergiert ihre Fourierreihe punktweise.

Beweis des Satzes 9

1. Schritt: Separationsansatz

Wir suchen Lösungen u in der Form

$$u(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi).$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhalten wir

$$\left[R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) \right] \Phi(\phi) + \frac{1}{r^2}R(r)\Phi''(\phi) = 0.$$

Dies führt zu

$$\frac{r^2 R''(r) + r R'(r)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} = \lambda,$$

wobei λ eine beliebige Konstante ist.

Damit ergeben sich folgende gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$r^2 R''(r) + r R'(r) - \lambda R(r) = 0, \quad (3.22)$$

$$\Phi''(\phi) + \lambda \Phi(\phi) = 0 \quad (3.23)$$

mit den Randbedingungen

$$R(r_0)\Phi(\phi) = g_1(\phi) \quad (\text{Dirichlet Problem}), \quad (3.24)$$

$$R'(r_0)\Phi(\phi) = g_2(\phi) \quad (\text{Neumann Problem}). \quad (3.25)$$

Die gewöhnliche Differentialgleichung (3.23) hat die Lösungen

$$\begin{aligned}\Phi_\lambda(\phi) &= A_\lambda \cosh \sqrt{-\lambda}\phi + B_\lambda \sinh \sqrt{-\lambda}\phi && \text{für } \lambda < 0, \\ \Phi_\lambda(\phi) &= A_\lambda \cos \sqrt{\lambda}\phi + B_\lambda \sin \sqrt{\lambda}\phi && \text{für } \lambda > 0, \\ \Phi_0(\phi) &= A_0 + B_0\phi && \text{für } \lambda = 0.\end{aligned}$$

Die Randbedingungen (3.24) bzw. (3.25) fordern eine 2π -Periodizität von $\Phi(\phi)$, was zur Parameterwahl $\lambda \geq 0$, $\sqrt{\lambda} = n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ führt. Damit erhalten wir eine abzählbare Menge von möglichen Lösungen der Form

$$\Phi_n(\phi) = A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi, \quad n = 0, 1, \dots .$$

Die Eulersche Differentialgleichung (3.22) besitzt dann die Lösungen

$$R_n(r) = \begin{cases} c_{10} + c_{20} \ln r & \text{für } n = 0 \\ c_{3n}r^n + c_{4n}r^{-n} & \text{für } n > 0. \end{cases}$$

Da $R_n(r)$ im Nullpunkt beschränkt sein soll (inneres Dirichlet bzw. Neumann Problem) folgt $c_{20} = c_{4n} = 0$ für alle $n > 1$. Die Lösungen des Ausgangsproblems lauten daher:

$$u_0(r, \phi) = R_0(r)\Phi_0(\phi) = C_1 A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned}u_n(r, \phi) &= R_n(r)\Phi_n(\phi) = (c_{3n}A_n \cos n\phi + c_{3n}B_n \sin n\phi)r^n, \\ &= (a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi)r^n, \end{aligned} \quad (3.27)$$

wobei a_0, a_n, b_n beliebige Konstanten sind.

2. Schritt: Konstruktion der Lösung in Form einer Fourierreihe

Durch Superposition der Lösungen (3.26), (3.27) erhalten wir eine formale Reihe

$$u(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r, \phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi)r^n \quad (3.28)$$

mit unbestimmten Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$. Diese Koeffizienten werden jetzt so bestimmt, dass die Randbedingungen erfüllt werden.

Dirichlet Problem

Da $g_1(\phi)$ punktweise in eine Fourierreihe entwickelbar ist, und $u(r_0, \phi) = g_1(\phi)$ sein soll, erhalten wir die Relation

$$\begin{aligned}u(r_0, \phi) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi)r_0^n = g_1(\phi) \\ &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\phi + \beta_n \sin n\phi)\end{aligned}$$

mit

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_1(\psi) \cos n\psi \, d\psi \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.29)$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_1(\psi) \sin n\psi \, d\psi \quad \text{für } n = 1, 2, \dots . \quad (3.30)$$

Es folgt, dass

$$a_0 = \alpha_0, \quad a_n = \frac{\alpha_n}{r_0^n}, \quad b_n = \frac{\beta_n}{r_0^n} \quad \text{ist.}$$

Dies führt zur formalen Darstellung der Lösung

$$u(r, \phi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\phi + \beta_n \sin n\phi) \left(\frac{r}{r_0}\right)^n. \quad (3.31)$$

Wir überlegen, ob die Reihe (3.31) für $r < r_0$ konvergiert und dort genügend oft gliedweise differenziert werden kann. Da

$$\begin{aligned} |\alpha_n| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_1(\psi) \cos n\psi \, d\psi \right| \leq \|g_1\|_{L_2(0,2\pi)} \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{2\pi} |\cos n\psi|^2 \, d\psi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|g_1\|_{L_2(0,2\pi)} \frac{1}{\pi} \sqrt{\pi} < \|g_1\|_{L_2(0,2\pi)} \end{aligned}$$

und $|\beta_n| < \|g_1\|_{L_2(0,2\pi)}$ sind, erhalten wir

$$|u(r, \phi)| \leq C \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n.$$

Damit stellt (3.31) für festes ϕ eine konvergente Potenzreihe für $r < r_0$ dar, die gliedweise nach r differenziert werden kann. Für festes $r < r_0$ kann ebenfalls gliedweise nach ϕ differenziert werden, da die k -ten Ableitungen der Reihenelemente

$$\frac{\partial^k}{\partial \phi^k} (\alpha_n \cos n\phi + \beta_n \sin n\phi) \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \leq n^k (|\alpha_n| + |\beta_n|) \left(\frac{r}{r_0}\right)^n < 2\|g_1\|_{L_2(0,2\pi)} n^k \left(\frac{r}{r_0}\right)^n$$

nach dem Wurzelkriterium

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^k \left(\frac{r}{r_0}\right)^n} = \frac{r}{r_0} < 1$$

eine gleichmäßig konvergente Reihe bilden. Wegen der punktweisen Konvergenz der Fourierreihe für $r = r_0$ werden die Randdaten im klassischen Sinn angenommen, genauer gilt nach dem Satz von Abel ([8, S.182])

$$\lim_{r \rightarrow r_0} u(r, \phi) = \lim_{r \rightarrow r_0} \sum_n \dots = \sum_n \lim_{r \rightarrow r_0} \dots = g_1(\phi)$$

für festes ϕ .

3. Schritt: Geschlossene Darstellung der Lösung

Sei $r < r_0$. Setzen wir die Fourierkoeffizienten (3.29) und (3.30) in (3.31) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} u(r, \phi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_1(\psi) \, d\psi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \left[\int_0^{2\pi} g_1(\psi) \cos n\psi \, d\psi \right] \cos n\phi \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{2\pi} g_1(\psi) \sin n\psi \, d\psi \right] \sin n\phi \right) \left(\frac{r}{r_0}\right)^n. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Nach dem Satz von Lebesgue ist die Reihenfolge von Summation und Integration für $r < r_0$ vertauschbar und wir erhalten

$$\begin{aligned}
u(r, \phi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_1(\psi) d\psi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \int_0^{2\pi} g_1(\psi) [\cos n\phi \cos n\psi + \sin n\phi \sin n\psi] d\psi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_1(\psi) \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos n(\psi - \phi)\right) d\psi.
\end{aligned}$$

Da $2 \cos nx = e^{inx} + e^{-inx}$ ist, gilt:

$$\begin{aligned}
u(r, \phi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_1(\psi) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n (e^{in(\psi-\phi)} + e^{-in(\psi-\phi)})\right) d\psi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_1(\psi) \left(1 + \frac{\frac{r}{r_0} e^{i(\psi-\phi)}}{1 - \frac{r}{r_0} e^{i(\psi-\phi)}} + \frac{\frac{r}{r_0} e^{-i(\psi-\phi)}}{1 - \frac{r}{r_0} e^{-i(\psi-\phi)}}\right) d\psi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_1(\psi) \left[\frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 - 2r_0 r \cos(\psi - \phi) + r^2}\right] d\psi.
\end{aligned}$$

4. Schritt: Eindeutigkeit

Die Lösung des Dirichlet Problems

$$u(r, \phi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_1(\psi) \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 - 2r_0 r \cos(\psi - \phi) + r^2} d\psi & \text{für } r < r_0, \\ g_1(\phi) & \text{für } r = r_0 \end{cases}$$

ist eindeutig.

Sei $v = u_1 - u_2$, wobei $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ bzw. $u_1, u_2 \in W^{2,2}(\Omega)$ Lösungen des Dirichlet Problems sind. Dann ist

$$\int_{\Omega} \Delta v v \, dx = - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} v \, dv = - \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx = 0,$$

d.h. $\nabla v = 0$ in Ω f.ü. und $v = \text{const}$ in Ω . Da $v \in C^1(\bar{\Omega})$ bzw. $v \in C(\bar{\Omega})$ und $v = 0$ auf $\partial\Omega$ ist, muss $v = 0$ in Ω sein.

Neumann Problem

Wir betrachten die formale Reihe (3.28) und beachten, dass folgende Relation gelten soll:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(r_0, \phi)}{\partial r} &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n n \cos n\phi + b_n n \sin n\phi) r_0^{n-1} \\
&= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\phi + \beta_n \sin n\phi) = g_2(\phi).
\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Voraussetzung

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_2(\phi) d\phi = 0$$

erhalten wir

$$a_0 = C, \quad a_n = \alpha_n \frac{1}{nr_0^{n-1}}, \quad b_n = \beta_n \frac{1}{nr_0^{n-1}} \quad \text{für } n \geq 1.$$

Damit muss (3.28) die Form haben

$$u(r, \phi) = C + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \frac{1}{n} (\cos n\phi) \frac{r^n}{r_0^{n-1}} + \beta_n \frac{1}{n} \sin n\phi \frac{r^n}{r_0^{n-1}} \right). \quad (3.33)$$

Analog zur Konvergenzdiskussion der Reihe (3.31), (setze $\frac{r^n}{r_0^{n-1}} = r_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^n$), erhalten wir, dass (3.33) für $r < r_0$ gliedweise nach r bzw. ϕ differenziert werden darf. Für $r = r_0$ gilt wegen der punktweisen Konvergenz von $g_2(\phi)$ für festes ϕ

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow r_0} \frac{\partial u}{\partial r}(r, \phi) &= \lim_{r \rightarrow r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cos n\phi \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1} + \beta_n \sin n\phi \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{r \rightarrow r_0} \dots = g_2(\phi). \end{aligned}$$

Einsetzen der Darstellung der Fourierkoeffizienten von $g_2(\phi)$ in (3.33) liefert

$$u(r, \phi) = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{nr_0^{n-1}} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_2(\psi) [\cos n\phi \cos n\psi + \sin n\phi \sin n\psi] d\psi.$$

Durch Änderung der Reihenfolge der Integration und Summation führt dies analog zum Dirichlet Problem zur Darstellung

$$\begin{aligned} u(r, \phi) &= C + \frac{r_0}{\pi} \int_0^{2\pi} g_2(\psi) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \frac{1}{n} \cos n(\psi - \phi) d\psi \\ &= C + \frac{r_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_2(\psi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n (e^{in(\psi-\phi)} + e^{-in(\psi-\phi)}) d\psi. \end{aligned}$$

Nun ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \ln \frac{1}{1-z}$ für $|z| < 1$. Für $r < r_0$ folgt die Dini Formel (beachte $\int_0^{2\pi} g_2(\psi) d\psi = 0!$)

$$\begin{aligned} u(r, \phi) &= C + \frac{r_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_2(\psi) \left[\ln \left(\frac{1}{1 - \frac{r}{r_0} e^{i(\psi-\phi)}} \right) + \ln \left(\frac{1}{1 - \frac{r}{r_0} e^{-i(\psi-\phi)}} \right) \right] d\psi \\ &= C + \frac{r_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_2(\psi) \left[\ln \left(\frac{r_0^2}{r_0^2 - 2rr_0 \cos(\psi - \phi) + r^2} \right) \right] d\psi \\ &= C + \frac{r_0}{\pi} \int_0^{2\pi} g_2(\psi) \ln \left(\frac{1}{\sqrt{r_0^2 - 2r_0 r \cos(\psi - \phi) + r^2}} \right) d\psi. \end{aligned}$$

Bemerkungen

- **Dirichlet Problem in der Kugel**

Durch Einführen von Kugelkoordinaten und einen Separationsansatz

$$u(r, \phi, \theta) = R(r)Y(\phi, \theta)$$

erhält man eine Eulersche Differentialgleichung zur Bestimmung von $R(r)$ und eine partielle Differentialgleichung zur Bestimmung der Kugelfunktionen $Y(\phi, \theta)$. Die letztere kann wiederum separiert werden. Die Poissonformel zur Lösung des Dirichlet Problems lautet in Kugelkoordinaten:

$$u(r, \phi, \theta) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi g_1(\theta', \phi') \frac{r_0(r_0^2 - r^2) \sin \theta'}{(r^2 - 2rr_0 \cos \gamma' + r_0^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta' d\phi'$$

mit $\cos \gamma' = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')$. In kartesischen Koordinaten $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ lautet die Poisson-Formel:

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r_0} \int_{|\mathbf{y}|=r_0} \frac{r_0^2 - |\mathbf{x}^2|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \tilde{g}_1(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}. \quad (3.34)$$

• Greensche Funktionen

Die Formeln (3.20), (3.21) und (3.34) lassen die Vermutung aufkommen, dass die Lösung des Dirichlet Problems (bzw. des Neumann Problems) mit Hilfe einer Funktion von zwei Variablen auch in allgemeineren Gebieten beschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= - \int_{\partial\Omega} \tilde{g}_1(\mathbf{y}) \frac{\partial G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_{\mathbf{y}}} d\sigma_{\mathbf{y}} \quad \text{Dirichlet Problem,} \\ u(\mathbf{x}) &= \int_{\partial\Omega} \tilde{g}_2(\mathbf{y}) G_N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}} \quad \text{Neumann Problem.} \end{aligned}$$

Die Funktionen $G_D = G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ bzw. $G_N = G_N(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ heißen Greensche Funktionen. Für den Kreis ist [17, Seite 200]

$$\begin{aligned} G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{r_0}{|\mathbf{y}|} \left| \mathbf{x} - \frac{r_0^2 \mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^2} \right| \right) \\ &= E_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - h_{D,2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Für die Kugel ist

$$\begin{aligned} G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - \frac{1}{4\pi} \left[\frac{r_0 |\mathbf{y}|}{|\mathbf{x} \mathbf{y}|^2 - \mathbf{y} r_0^2} \right] \\ &= E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - h_{D,3}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

$E_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ bzw. $E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sind die Fundamentallösungen des zwei- bzw. dreidimensionalen Laplace-Operators, d.h.

$$-\Delta_{\mathbf{x}} E_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad i = 2, 3.$$

Die Funktionen $h_{D,i}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sind harmonische Funktionen, so dass

$$\begin{aligned} -\Delta_{\mathbf{x}} G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega, \mathbf{y} \in \Omega, \\ G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \partial\Omega, \mathbf{y} \in \Omega. \end{aligned}$$

Weitere Ausführungen zu Greenschen Formeln sind z.B. in [17, S. 192-202] und [19, S. 318-330] zu finden.

• Inhomogene Gleichungen

Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= g_1 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Dann hat u die Gestalt

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} - \int_{\partial\Omega} g_1(\mathbf{y}) \frac{\partial G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_{\mathbf{y}}} d\sigma_{\mathbf{y}}.$$

• **Maximumprinzip**

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein zusammenhängendes beschränktes Gebiet, $\Delta u \geq 0$ bzw. $\Delta u \leq 0$ und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Wenn u in einem inneren Punkt von Ω ihr Maximum (oder Minimum) annimmt, so ist $u(x) = \text{const.}$

Harmonische Funktionen nehmen daher ihr Maximum bzw. Minimum auf dem Rand des Gebietes an. Daraus folgt wiederum die Eindeutigkeit der Lösung des Dirichlet Problems.

3.2.2 Rand- Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten als Modellfall das Dirichlet Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung in einem Stab der Länge l . Gesucht ist die Temperatur, bzw. Teilchenkonzentration $u = u(x, t)$, so dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{a^2 \partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= f(x, t) \quad \text{für } 0 < x < l, t > 0, \\ u(0, t) = u(l, t) &= 0 \quad \text{für } t \geq 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x) \quad \text{für } 0 \leq x \leq l. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Satz 10 Sei $f(x, t) \in C^{0,1}([0, l] \times [0, T])$, d.h. bzgl. x stetig in $[0, l]$ und bzgl. t stetig differenzierbar in $[0, T]$; es sei $X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin(\lambda_k x)$, $\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$, $k = 1, 2, \dots$. Wir nehmen an, dass gilt

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) X_k(x), \quad \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c'_k(t) X_k(x)$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(t)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_k < \tilde{C}, \quad |c'_k(t)| \leq C \quad \forall t \in [0, T], \quad k = 1, 2, \dots$$

Weiterhin sei $u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k X_k(x)$ und $\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k| < \infty$. Dann ist

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \lambda_k x \left(\beta_k e^{-a^2 \lambda_k^2 t} + \int_0^t c_k(\tau) e^{-a^2 \lambda_k^2 (t-\tau)} d\tau \right) \\ &= \left(\int_0^l G(x, \xi, t) u_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \right) \end{aligned}$$

mit

$$\beta_k = \int_0^l u_0(x) X_k(x) dx, \quad c_k(\tau) = \int_0^l f(x, \tau) X_k(x) dx$$

aus $C^{2,1}([0, l] \times (0, T]) \cap C([0, l] \times [0, T])$ eine Lösung des Problems (3.35). Hierbei ist $G(x, \xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-a^2 \lambda_k^2 t} X_k(\xi) X_k(x)$.

Bemerkung

Die Bedingung $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(t)| < \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_k < \tilde{C}$ ist erfüllt, falls $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ einer Dirichletschen Bedingung bezüglich x genügt [16, S. 417]. Ebenso ist $\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k| < \infty$, falls $\frac{\partial u_0}{\partial x}$ einer Dirichletschen Bedingung genügt.

Beweis von Satz 10**1. Separationsansatz**

Wir suchen Lösungen der Form $u(x, t) = X(x)T(t)$. Dies führt zum Rand-Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(t)}{\partial t} X(x) - a^2 T(t) X''(x) &= f(x, t), \\ T(t) X(0) &= 0, \\ T(t) X(l) &= 0, \\ T(0) X(x) &= u_0(x). \end{aligned}$$

Die grundlegende Idee ist, ein Rand-Eigenwertproblem zu betrachten, das gestattet, $X''(x)$ durch ein Vielfaches von $X(x)$ zu ersetzen und das die Annahme der Randbedingungen garantiert:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad (3.36)$$

$$X(0) = X(l) = 0. \quad (3.37)$$

Die zu den Eigenwerten $\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$, $k = 1, 2, \dots$ gehörigen Eigenfunktionen

$X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \lambda_k x$ liefern ein im $L_2(0, l)$ orthonormiertes Funktionensystem. Das Problem (3.36), (3.37) wird auch Sturm-Liouvillesches Rand-Eigenwertproblem genannt.

Wir betrachten die Reihe $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) T_k(t)$ wobei die Funktionen $T_k(t)$ so zu bestimmen sind, dass formal (Summation und Ableitung werden vertauscht)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\partial T_k(t)}{\partial t} X_k(x) - a^2 X_k''(x) T_k(t) \right) = f(x, t), \quad (3.38)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) X_k(x) = u_0(x). \quad (3.39)$$

ist. Da (3.36) gilt, erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\partial T_k(t)}{\partial t} + a^2 \lambda_k^2 T_k(t) \right) X_k(x) = f(x, t), \quad (3.40)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) X_k(x) = u_0(x), \quad (3.41)$$

was nach den Voraussetzungen über f und u_0 sinnvoll ist. Multiplizieren wir (3.40) und (3.41) mit $X_m(x)$ und integrieren über dem Intervall $(0, l)$, dann ergibt sich wegen der Orthonormiertheit

$$\begin{aligned} \frac{dT_m(t)}{dt} + a^2 \lambda_m^2 T_m(t) &= \int_0^l f(x, t) X_m(x) dx = c_m(t), \\ T_m(0) &= \int_0^l u_0(x) X_m(x) dx = \beta_m. \end{aligned}$$

Die Lösungen dieses Anfangswertproblems sind

$$T_m(t) = e^{-a^2 \lambda_m^2 t} \left(\beta_m + \int_0^t c_m(\tau) e^{a^2 \lambda_m^2 \tau} d\tau \right).$$

Damit wird

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) T_k(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \lambda_k x e^{-a^2 \lambda_k^2 t} \left(\beta_k + \int_0^t c_k(\tau) e^{a^2 \lambda_k^2 \tau} d\tau \right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \lambda_k x \left(\beta_k e^{-a^2 \lambda_k^2 t} + \int_0^t c_k(\tau) e^{-a^2 \lambda_k^2 (t-\tau)} d\tau \right). \end{aligned} \quad (3.42)$$

2. Schritt: Konvergenzuntersuchungen

- a) Die Reihe (3.42) konvergiert gleichmäßig für $t \in [0, T], x \in [0, l]$. Wir schätzen den Koeffizienten vor $X_k(x)$ ab:

$$\begin{aligned} \left| \beta_k e^{-a^2 \lambda_k^2 t} + \int_0^t c_k(\tau) e^{-a^2 \lambda_k^2 (t-\tau)} d\tau \right| &\leq |\beta_k| + \int_0^t |c_k(\tau)| e^{-a^2 \lambda_k^2 (t-\tau)} d\tau \\ &\leq |\beta_k| + \tilde{C} \int_0^t e^{-a^2 \lambda_k^2 (t-\tau)} d\tau = |\beta_k| + \tilde{C} \frac{1 - e^{-a^2 \lambda_k^2 t}}{a^2 \lambda_k^2} \leq |\beta_k| + \frac{\tilde{C}}{a^2 \lambda_k^2}. \end{aligned}$$

Damit ist eine konvergente Majorante gefunden worden und (3.42) konvergiert absolut und gleichmäßig. Es ist $u(x, t) \in C([0, l] \times [0, T])$.

- b) Wir zeigen, dass die nach t gliedweise differenzierte Reihe für $x \in [0, l], t \in [\varepsilon, T], \varepsilon > 0$ gleichmäßig konvergiert. Die nach t gliedweise differenzierte Reihe lautet (ohne Faktor $\sqrt{\frac{2}{l}}$):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin \lambda_k x \left[-a^2 \lambda_k^2 \beta_k e^{-a^2 \lambda_k^2 t} + c_k(t) - a^2 \lambda_k^2 \int_0^t e^{-a^2 \lambda_k^2 (t-\tau)} c_k(\tau) d\tau \right].$$

Nach partieller Integration erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin \lambda_k x \left[-a^2 \lambda_k^2 \beta_k e^{-a^2 \lambda_k^2 t} + \frac{a^2 \lambda_k^2}{a^2 \lambda_k^2} \int_0^t e^{-a^2 \lambda_k^2 (t-\tau)} c_k'(\tau) d\tau + c_k(0) e^{-a^2 \lambda_k^2 t} \right].$$

Wir schätzen den Koeffizienten vor $\sin \lambda_k x$ ab:

$$\begin{aligned} &\left| -a^2 \lambda_k^2 \beta_k e^{-a^2 \lambda_k^2 t} + c_k(0) e^{-a^2 \lambda_k^2 t} + \int_0^t c_k'(\tau) e^{-a^2 \lambda_k^2 (t-\tau)} d\tau \right| \\ &\leq |\beta_k| a^2 \lambda_k^2 e^{-a^2 \lambda_k^2 \varepsilon} + |c_k(0)| e^{-a^2 \lambda_k^2 \varepsilon} + C \int_0^t e^{-a^2 \lambda_k^2 (t-\tau)} d\tau \\ &\leq |\beta_k| \frac{1}{\varepsilon} + |c_k(0)| \frac{1}{a^2 \lambda_k^2 \varepsilon} + \frac{C}{a^2 \lambda_k^2}. \end{aligned}$$

Damit haben wir eine Majorante gefunden und die gleichmäßige Konvergenz ist gesichert. Hierbei haben wir genutzt, dass

$$e^x \geq x \quad \text{für } x \geq 0 \text{ ist.}$$

Es folgt, dass

$$e^{-x} \leq x^{-1} \quad \text{und} \quad xe^{-x} \leq 1 \quad \text{für } x = a^2 \lambda_k^2 \varepsilon \text{ ist.}$$

- c) Wir betrachten die nach x zweimal gliedweise differenzierte Reihe im Punkt $(x, t) \in [0, l] \times [\varepsilon, T], \varepsilon > 0$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} -\lambda_k^2 \sin \lambda_k x \left(\beta_k e^{-a^2 \lambda_k^2 t} + \int_0^t c_k(\tau) e^{-a^2 \lambda_k^2 (t-\tau)} d\tau \right).$$

Wir schätzen den Koeffizienten vor $\sin \lambda_k x$ ab:

$$\begin{aligned} & \left| \lambda_k^2 \beta_k e^{-a^2 \lambda_k^2 t} + \lambda_k^2 \int_0^t c_k(\tau) e^{-a^2 \lambda_k^2 (t-\tau)} d\tau \right| \\ & \leq |\beta_k| \frac{1}{\varepsilon a^2} + \left| \frac{-\lambda_k^2}{a^2 \lambda_k^2} \int_0^t e^{-a^2 \lambda_k^2 (t-\tau)} c_k'(\tau) d\tau + \left[\frac{1}{a^2} e^{-a^2 \lambda_k^2 (t-\tau)} c_k(\tau) \right]_0^t \right| \\ & \leq |\beta_k| \frac{1}{\varepsilon a^2} + \frac{C}{a^2} \int_0^t e^{-a^2 \lambda_k^2 (t-\tau)} d\tau + \left| \frac{1}{a^2} c_k(t) \right| + \left| \frac{c_k(0)}{a^2} e^{-a^2 \lambda_k^2 t} \right| \\ & < |\beta_k| \frac{1}{\varepsilon a^2} + \frac{C}{a^2} \frac{1}{a^2 \lambda_k^2} + \frac{1}{a^2} |\tilde{c}_k| + \frac{1}{a^2} |c_k(0)| \frac{1}{a^2 \lambda_k^2 \varepsilon}. \end{aligned}$$

Daraus folgt die gleichmäßige Konvergenz.

3. Schritt: Greensche Funktion

Wir setzen in die Reihenentwicklung (3.42) die Fourierkoeffizienten ein.

Für $t \in [0, T]$ ist die Reihenfolge von Summation und Integration vertauschbar:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \lambda_k x \left(e^{-a^2 \lambda_k^2 t} \int_0^l u_0(\xi) X_k(\xi) d\xi + \int_0^t \int_0^l f(\xi, \tau) X_k(\xi) e^{-a^2 \lambda_k^2 (t-\tau)} d\xi d\tau \right) \\ &= \int_0^l \sum_{k=1}^{\infty} e^{-a^2 \lambda_k^2 t} X_k(\xi) X_k(x) u_0(\xi) d\xi \\ &\quad + \int_0^t \int_0^l \left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{-a^2 \lambda_k^2 (t-\tau)} X_k(\xi) X_k(x) \right) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ &= \int_0^l G(x, \xi, t) u_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \end{aligned}$$

wobei gilt:

$$G(x, \xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-a^2 \lambda_k^2 t} X_k(\xi) X_k(x).$$

$G(x, \xi, t)$ heißt auch in diesem Fall Greensche Funktion für die Wärmeleitungsgleichung mit Dirichlet Randbedingungen.

Bemerkungen

- **Inhomogene Randbedingungen**

Wir betrachten das Problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad (3.43)$$

$$u(0, t) = u_1(t), \quad (3.44)$$

$$u(l, t) = u_2(t), \quad (3.45)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (3.46)$$

wobei $u_1(t)$ und $u_2(t)$ nach t genügend oft differenzierbar sind. Sei $v = v(x, t)$ eine neue unbekannte Funktion mit

$$v(x, t) = u(x, t) - (u_1(t) + \frac{x}{l}[u_2(t) - u_1(t)]).$$

$v(x, t)$ genügt den homogenen Randbedingungen.

$$v(0, t) = u(0, t) - u_1(t) = 0,$$

$$v(l, t) = u(l, t) - u_2(t) = 0.$$

Weiterhin ist

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} - (u_1'(t) + \frac{x}{l}[u_2'(t) - u_1'(t)]),$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$v(x, 0) = u(x, 0) - (u_1(0) + \frac{x}{l}[u_2(0) - u_1(0)]).$$

Damit lautet das Rand-Anfangswertproblem für v :

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f(x, t) - (u_1'(t) + \frac{x}{l}[u_2'(t) - u_1'(t)]) = F(x, t),$$

$$v(0, t) = 0,$$

$$v(l, t) = 0,$$

$$v(0, x) = u_0(x) - (u_1(0) + \frac{x}{l}[u_2(0) - u_1(0)]) = v_0(x).$$

Falls F und v_0 den Voraussetzungen des Satzes 10 genügen, dann existiert eine klassische Lösung.

- **Maximumprinzip**

Es sei

$$Q_T = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\},$$

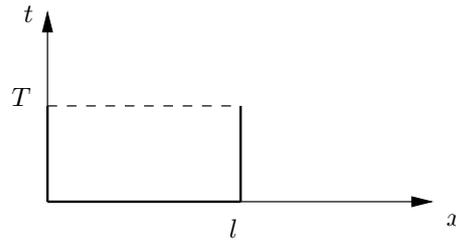
$$\overline{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\},$$

$$\hat{Q}_T = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}.$$

Sei $u(x, t) \in C(\overline{Q}_T) \cap C^{2,1}(\hat{Q}_T)$ und genüge in Q_T der homogenen Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Dann nimmt die Funktion $u(x, t)$ im abgeschlossenen Gebiet \overline{Q}_T sowohl ihren größten als auch kleinsten Wert auf $\overline{Q}_T \setminus \hat{Q}_T$ an.

Abbildung 3.1: Das Gebiet $\bar{Q}_T \setminus \hat{Q}_T$

- **Eindeutigkeit**

Das gemischte Problem (3.43) bis (3.46) besitzt in der Klasse $C([0, l] \times [0, T]) \cap C^{2,1}((0, l) \times (0, T])$ höchstens eine Lösung.

- **Beweis**

Angenommen, es gäbe zwei Lösungen u_1 und u_2 . Die Differenz $w = u_1 - u_2$ nimmt ihren größten und kleinsten Wert auf $\bar{Q}_T \setminus \hat{Q}_T$ an. Dort ist $w = 0$ aufgrund der Anfangs- und Randbedingungen. Es folgt aus dem Maximumsprinzip, dass $w \equiv 0$ in \bar{Q}_T ist. ■

- **Mehrere Raumdimensionen**

In diesem Fall lautet das Rand-Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u &= f && \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ u(\mathbf{x}, 0) &= u_0(\mathbf{x}) && \text{für } \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}, t) &= 0 && \text{für } (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty). \end{aligned}$$

Das entsprechende Rand-Eigenwertproblem lautet:

Finde Funktionen $X(\mathbf{x})$, so dass gilt:

$$\begin{aligned} \Delta X + \lambda^2 X &= 0 && \text{in } \Omega, \\ X &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

- **Andere Randbedingungen**

Sind andere Randbedingungen an den Intervallenden gegeben, dann ist das Rand-Eigenwertproblem (3.36), (3.37) entsprechend zu modifizieren. Die dadurch berechneten Eigenwerte λ_k und Eigenfunktionen X_k sind im Fourierrechen analog einzusetzen.

3.2.3 Rand-Anfangswertproblem für die Wellengleichung

Wir betrachten auch in diesem Fall ein räumlich-eindimensionales Modellproblem für eine eingespannte schwingende Saite:

$$\begin{aligned} u_{tt} - a^2 u_{xx} &= f(x, t) && \text{für } 0 < x < l, t > 0, \\ u(l, t) &= u(0, t) &= 0 && \text{für } t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x) && \text{für } 0 \leq x \leq l, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= u_1(x) && \text{für } 0 \leq x \leq l. \end{aligned}$$

Das Vorgehen ist ähnlich wie bei der Wärmeleitungsgleichung. Zunächst wird eine Separation der Variablen vorgenommen. Dazu betrachten wir das Rand-Eigenwertproblem

(3.36),(3.37) und stellen die Lösung dar als

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)T_k(t).$$

Hierbei ist $X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \lambda_k x$ und die Funktionen $T_k(t)$ sind so zu bestimmen, dass

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 T_k}{\partial t^2} X_k(x) - a^2 X_k''(x) T_k(t) \right) = f(x, t),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) X_k(x) = u_0(x),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k'(0) X_k(x) = u_1(x).$$

Setzen wir voraus, dass f, u_0 und u_1 in entsprechende Fourierreihen entwickelbar sind, führt dies zu folgendem Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} T_k'' + a^2 \lambda_k^2 T_k(t) &= c_k(t) \quad \text{für } t > 0, \\ T_k(0) &= \beta_k, \\ T_k'(0) &= \alpha_k, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} c_k(t) &= \int_0^l f(x, t) X_k(x) dx, \\ \beta_k &= \int_0^l u_0(x) X_k(x) dx, \\ \alpha_k &= \int_0^l u_1(x) X_k(x) dx \end{aligned}$$

die entsprechenden Fourierkoeffizienten sind. Die Lösungen T_k haben die Gestalt

$$T_k(t) = \frac{\alpha_k}{\lambda_k a} \sin \lambda_k a t + \beta_k \cos \lambda_k a t + \frac{1}{a \lambda_k} \int_0^t c_k(\tau) \sin a \lambda_k (t - \tau) d\tau.$$

Die formale Lösung lautet:

$$\begin{aligned} u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) T_k(t) &= \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \lambda_k x \left[\frac{\alpha_k}{a \lambda_k} \sin \lambda_k a t + \beta_k \cos \lambda_k a t \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{a \lambda_k} \int_0^t c_k(\tau) \sin a \lambda_k (t - \tau) d\tau \right]. \end{aligned}$$

Sind u_0, u_1 und f genügend glatt, dann ist die formale Lösung auch klassische Lösung, d.h.

$$u(x, t) \in C^{2,2}((0, l), (0, T)) \cap C^{0,1}([0, l], [0, T]).$$

■

Bemerkung

Es gibt höchstens eine klassische Lösung. Für die Wellengleichung gilt das Maximum Prinzip nicht, und der Beweis erfolgt mit Hilfe der Energiemethode. Wir nehmen an, es gäbe zwei Lösungen u_1 und u_2 . Die Differenz $w = u_1 - u_2$ genügt dem homogenen Problem:

$$\begin{aligned} w_{tt} - a^2 w_{xx} &= 0 & \text{in } 0 < x < l, t > 0, \\ w(0, t) = w(l, t) &= 0 & \text{für } t \geq 0, \\ w(x, 0) &= 0 & \text{für } 0 \leq x \leq l, \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) &= 0 & \text{für } 0 \leq x \leq l. \end{aligned}$$

Wir führen die Energie ein

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l [(w_t)^2 + a^2 (w_x)^2] dx, \quad 0 \leq t.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= \frac{1}{2} \int_0^l \left[\frac{\partial}{\partial t} (w_t)^2 + a^2 \frac{\partial}{\partial t} (w_x)^2 \right] dx = \int_0^l (w_t w_{tt} + a^2 w_x w_{xt}) dx \\ &= \int_0^l w_t (w_{tt} - a^2 w_{xx}) dx + a^2 w_x w_t \Big|_0^l. \end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned} w_t(l, t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{w(l, t+h) - w(l, t)}{h} = 0, \\ w_t(0, t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{w(0, t+h) - w(0, t)}{h} = 0 \end{aligned}$$

für $t \geq 0$ ist, folgt

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l w_t (w_{tt} - a^2 w_{xx}) dx = 0.$$

Damit ist $E(t) = \text{const}$ und

$$\begin{aligned} E(t) &= E(0) = \frac{1}{2} \int_0^l (w_t^2(x, 0) dx + a^2 w_x^2(x, 0) dx) \\ &= \frac{1}{2} a^2 \int_0^l w_x^2(x, 0) dx = \frac{1}{2} a^2 \left(- \int_0^l w_{xx}(x, 0) w(x, 0) + w(x, 0) w_x(x, 0) \Big|_0^l \right) = 0. \end{aligned}$$

Aus diesem Energieerhaltungsprinzip folgt, dass

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l w_t^2(x, t) + a^2 w_x^2(x, t) dx = 0$$

für $t \geq 0$ ist und

$$w_t(x, t) = w_x(x, t) \equiv 0.$$

Daher ist $w \equiv \text{const}$. Die homogenen Randbedingungen (bzw. Anfangsbedingungen) liefern $w \equiv 0$.

Kapitel 4

Schwache Lösungen

Wie wir im dritten Kapitel festgestellt haben, ist die Existenz von klassischen Lösungen nur unter recht einschneidenden Voraussetzungen sicher zu stellen. Eine Verallgemeinerung der klassischen Differentiation in Form eines *schwachen* Ableitungsbegriffs bzw. als distributionelle Ableitung wird in diesem Zusammenhang hilfreich sein. Weiterhin gestattet die Abschwächung des Ableitungsbegriffes die Differentialgleichungen in Hilberträumen bzw. reflexiven Banachräumen zu behandeln und numerische Methoden zur näherungsweise Berechnung der Lösung zu entwickeln.

Wir beginnen mit einer kurzen Einführung des *schwachen* Ableitungsbegriffes und entsprechender Sobolvräume und diskutieren die schwache Lösbarkeit der Poisson-, Wärmeleitungs- und Wellengleichung.

Bemerkung: In diesem Kapitel heben wir die vektoriellen Größen nicht durch Fettdruck hervor.

4.1 Schwache Ableitungen

Der Raum $L_2(\Omega)$ wurde schon früher erwähnt. Wir benötigen ihn jetzt verstärkt und definieren ihn daher an dieser Stelle.

Definition 16 Sei Ω eine nichtleere, offene Menge im \mathbb{R}^n , $n \geq 1$. $L_2(\Omega)$ bezeichnet die lineare Menge von Äquivalenzklassen von in Ω messbaren Funktionen $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx < \infty.$$

Zwei Funktionen u und v gehören zu einer Äquivalenzklasse, falls $\int_{\Omega} |u - v|^2 dx = 0$, d.h.

$u(x) = v(x)$ fast überall (f.ü.) in Ω .

Einige Eigenschaften:

- In $L_2(\Omega)$ ist ein Skalarprodukt definiert

$$(u, v)_0 = (u, v)_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx,$$

das die Norm induziert

$$\|u\|_0 = \|u\|_{L_2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- $L_2(\Omega)$ ist ein Hilbertraum (vollständig in Bezug auf die Normkonvergenz, d.h. $u_n \rightarrow u \Leftrightarrow \|u_n - u\|_0 \rightarrow 0$.)
- Die Teilmengen $C_0^\infty(\Omega)$ und $C(\overline{\Omega})$ sind dicht in $L_2(\Omega)$. Hierbei ist $C_0^\infty(\Omega)$ die Menge aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω . Der Träger einer Funktion u ist definiert als $\text{supp } u = \overline{\{x : u(x) \neq 0\}}$.
- Es gilt ein Variationslemma (Lemma von Du Bois-Reymond): Sei $u \in L_2(\Omega)$ und

$$\int_{\Omega} uv dx = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega),$$

dann ist $u(x) = 0$ f.ü. in Ω .

Der Schlüssel zur Verallgemeinerung des Ableitungsbegriffs liegt in der Anwendung der partiellen Integration. Wir erinnern, dass für eine beschränkte meßbare Menge $\Omega \in \mathbb{R}^n$ und stetig differenzierbare Funktionen $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ gilt:

im Fall $n = 1, \Omega = (a, b)$:

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = - \int_a^b u'(x)v(x) dx + u(x)v(x)|_a^b;$$

im Fall $n > 1, \Omega \subset \mathbb{R}^n, \partial\Omega$ glatt, n äußerer Normalenvektor der Fläche $\partial\Omega, x = (x_1, \dots, x_n)$:

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) v(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) \cos(n, x_i) d\sigma.$$

Durch wiederholte Anwendung der partiellen Integration auf Funktionen $u, v \in C^{|\alpha|}(\overline{\Omega})$, wobei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ für $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ ein Multiindex und $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ ist, erhalten wir:

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial^{|\alpha|-1} v}{\partial x_1^{\alpha_1-1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial^{|\alpha|-1} v \cos(n, x_1)}{\partial x_1^{\alpha_1-1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} d\sigma \quad (4.1)$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} v dx + \int_{\partial\Omega} R(u, v) d\sigma. \quad (4.2)$$

R hängt von Ableitungen von u und v bis zur Ordnung $|\alpha| - 1$ ab. Mit der Bezeichnung $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ können wir (4.2) auch wie folgt schreiben:

$$\int_{\Omega} u D^\alpha v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha uv dx + \int_{\partial\Omega} R(u, v) d\sigma.$$

Es sei $C_0^{|\alpha|}(\Omega) = \{v \in C^{|\alpha|}(\overline{\Omega}) : \text{supp } v \text{ beschränkt, } \text{supp } v \subset \Omega\}$, das heißt, die Funktionen $v \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ verschwinden in einem Randstreifen und damit verschwindet das Oberflächenintegral in (4.2) für diese Funktionen.

Definition 17 (Schwache Ableitungen) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $u, w \in L^1_{loc}(\Omega)$, das heißt, u und w sind über jedem beschränkten inneren Teilgebiet von Ω integrierbar. $w = u_\alpha = D^\alpha u$ ist die schwache α -te Ableitung von u im Gebiet Ω (nicht punktweise definiert!), falls gilt:

$$\int_{\Omega} u D^\alpha v \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} w v \, dx \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega). \quad (4.3)$$

Durch *Überschiebung* der Differentiation auf die so genannten Testfunktionen wird durch die Formel (4.3) die schwache Ableitung eingeführt. Diese Idee wird in der Distributionentheorie weiter ausgebaut. Distributionen werden als lineare Funktionale über dem Raum $C_0^\infty(\Omega)$ definiert.

Die schwachen Ableitungen sind in $L^1_{loc}(\Omega)$ eindeutig bestimmt (Lemma von Du Bois-Reymond) und stimmen mit den klassischen Ableitungen überein, falls diese existieren und sich in $L^1_{loc}(\Omega)$ befinden.

Es gilt:

- $D^{\alpha+\beta}u = D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u)$.
- Falls $u_n \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $u_n \rightarrow u$ in $L_2(\Omega)$ und $D^\alpha u_n \rightarrow w$ in $L_2(\Omega)$, dann ist $w = D^\alpha u$.

Beispiel

Es sei $\Omega = (-1, 1)$ und $u(x) = |x|$, siehe Abbildung 4.1.

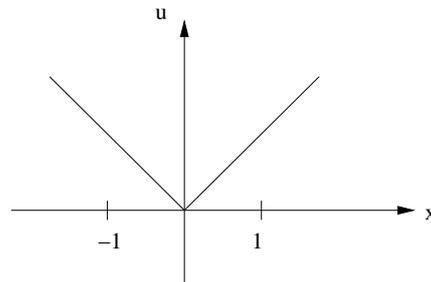


Abbildung 4.1: $u(x) = |x|$

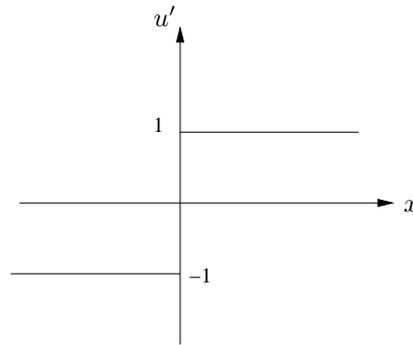
Wir berechnen die schwache Ableitung u' .

Wir betrachten die Definitionsgleichung

$$\int_{-1}^{+1} u v' \, dx = - \int_{-1}^{+1} w v \, dx \quad \text{für alle } v \in C_0^1((-1, +1)).$$

Für $u = |x|$ und nach partieller Integration über den Teilintervallen $(-1, 0)$ und $(0, 1)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} |x| v' \, dx &= - \int_{-1}^0 x v' \, dx + \int_0^1 x v' \, dx = \int_{-1}^0 v \, dx - \int_0^1 v \, dx \\ &= - \int_{-1}^{+1} \operatorname{sgn}(x) v \, dx = - \int_{-1}^{+1} w v \, dx. \end{aligned}$$

Abbildung 4.2: $u'(x) = \operatorname{sgn}(x)$

Aus dem Lemma von Du Bois-Reymond folgt, dass $u'(x) = w(x) = \operatorname{sgn}(x)$ ist; Abbildung 4.2.

Die zweite Ableitung von $u(x) = |x|$ (bzw. die erste Ableitung von $\operatorname{sgn} x$) ist durch

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \operatorname{sgn}(x)v' dx &= -\int_{-1}^0 v' dx + \int_0^1 v' dx = -v(0) + \underbrace{v(-1)}_{=0} + \underbrace{v(1)}_{=0} - v(0) \\ &= -2v(0) \quad \forall v \in C_0^1((-1, +1)) \end{aligned}$$

definiert.

Wir untersuchen nun die Frage, ob es eine integrierbare Funktion $w \in L(-1, +1)$ gibt, so dass

$$2v(0) = \int_{-1}^{+1} w(x)v(x) dx$$

ist.

Wir nehmen an, dass es ein solches $w \in L(-1, +1)$ gibt und betrachten eine beliebige Funktion $v \in C_0^1((-1, +1))$. Da sich auch xv in $C_0^1((-1, +1))$ befindet, muss

$$\int_{-1}^1 w(x)xv(x)dx = 2v(0) \cdot 0 = 0$$

gelten.

Aus dem Lemma von Du Bois-Reymond folgt, dass $w(x)x = 0$ f.ü. ist und daher $w(x) = 0$ f.ü.. Damit wäre

$$\int_{-1}^1 w(x)v(x)dx = 0 = 2v(0)$$

für alle $v \in C_0^1((-1, +1))$, was nicht sein kann.

Folgerung

Sprungfunktionen besitzen keine schwachen Ableitungen. Jedoch existiert eine Ableitung im Distributionensinn.

Die Räume $H^k(\Omega)$, $\overset{\circ}{H}^k(\Omega)$, $W^{k,p}(\Omega)$ **und** $\overset{\circ}{W}^{k,p}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq p < \infty$

Definition 18 Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Der lineare Raum

$$H^k(\Omega) = \{u \in L_2(\Omega) : D^\alpha u \in L_2(\Omega) \text{ f\u00fcr } |\alpha| \leq k\},$$

versehen mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_k = (u, v)_{H^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_0$$

und der Norm

$$\|u\|_k = \|u\|_{H^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.4)$$

he\u00df\u00fct Sobolev-Raum. $H^k(\Omega)$ ist ein Hilbertraum.

F\u00fcr $1 \leq p < \infty$ f\u00fchren wir den Sobolev-Raum $W^{k,p}(\Omega)$ ein, der f\u00fcr $p = 2$ mit $H^k(\Omega)$ \u00fcbereinstimmt.

Definition 19 (ganzzahlige Ableitungen) Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 \leq p < \infty$. Der lineare Raum

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L_p(\Omega) : D^\alpha u \in L_p(\Omega) \text{ f\u00fcr } |\alpha| \leq k\}$$

versehen mit der Norm

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (4.5)$$

$$= \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (4.6)$$

he\u00df\u00fct Sobolev-Raum. Hierbei ist $\|v\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$.

Definition 20 $\overset{\circ}{H}^k(\Omega)$ ist die Abschlie\u00dfung von $C_0^\infty(\Omega)$ bez\u00fcglich der Norm (4.4).

$\overset{\circ}{W}^{k,p}(\Omega)$ ist die Abschlie\u00dfung von $C_0^\infty(\Omega)$ bez\u00fcglich der Norm (4.5).

Satz 11 (Ungleichungen) [18, S. 382 u. ff]

- Es sei Ω ein beschr\u00e4nktes Gebiet. In $\overset{\circ}{H}^k(\Omega)$ gilt die Poincar\u00e9-Friedrichs Ungleichung

$$\|u\|_k \leq C |u|_k, \quad (4.7)$$

wobei $|u|_k = \left[\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_0^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ die Seminorm in $H^k(\Omega)$ bezeichnet.

- Der Rand $\partial\Omega$ sei Lipschitz-stetig, $\Gamma \subset \partial\Omega$, $\text{meas } \Gamma \neq 0$, wobei $\text{meas } \Gamma$ das Maß des Flächenstücks ist. Dann gilt für alle $u \in H^1(\Omega)$

$$\|u\|_1 \leq C \left[\left| \int_{\partial\Omega} u \, d\sigma \right| + \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right], \quad (4.8)$$

$$\|u\|_1 \leq C \left[\left| \int_{\Omega} u(x) dx \right| + \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right], \quad (4.9)$$

$$\|u\|_1 \leq C \left[\int_{\Gamma} |u|^2 d\sigma + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.10)$$

Ist $u|_{\Gamma} = 0$, dann kann man zeigen [9], [3]

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 &\leq C \text{meas}(\Omega) |u|_1^2 \\ |u|_1^2 &\leq \|u\|_1^2 \leq (1 + C \text{meas}(\Omega)) |u|_1^2. \end{aligned}$$

Beweis

Wir beweisen nur die Friedrichs'sche Ungleichung. Sei u zunächst ein Element aus $C_0^\infty(\Omega)$. Da Ω beschränkt ist, gibt es eine Kugel $K_R(0)$, so dass $\Omega \subset K_R(0)$ ist.

Für jeden Punkt $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ gilt, dass $x_1 \in [-R, R]$ und wir haben

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &= \left| \int_{-R}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(\xi, x_2, \dots, x_n) d\xi \right|^2 \\ &\stackrel{\text{Schwarz-Ungleichung}}{\leq} (x_1 + R) \int_{-R}^{x_1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(\xi, x_2, \dots, x_n) \right|^2 d\xi \\ &\leq 2R \int_{-R}^{+R} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(\xi, x_2, \dots, x_n) \right|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Nach Integration über Ω erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx = \|u\|_0^2 &\leq 2R \int_{\Omega} \int_{-R}^{+R} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(\xi, x_2, \dots, x_n) \right|^2 d\xi dx \\ &= 4R^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_0^2 \leq 4R^2 |u|_1^2. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\|u\|_1^2 = \|u\|_0^2 + |u|_1^2 \leq 4R^2 |u|_1^2 + |u|_1^2 = (4R^2 + 1) |u|_1^2. \quad (4.11)$$

Allgemeiner gilt:

$$\begin{aligned} |u|_{j-1}^2 &\leq 4R^2 |u|_j^2 \quad j = 1, 2, \dots, k, \\ \|u\|_k^2 &= \sum_{j=0}^k |u|_j^2 \leq ((4R^2)^k + (4R^2)^{k-1} + \dots + 4R^2 + 1) |u|_k^2 \\ &= \left(\frac{(4R^2)^{k+1} - 1}{4R^2 - 1} \right) |u|_k^2. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun ein $u \in \mathring{H}^k(\Omega)$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ finden wir ein Element $\tilde{u} \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\|u - \tilde{u}\|_k < \varepsilon$.

Es ist

$$\begin{aligned} \|u\|_k &\leq \|u - \tilde{u}\|_k + \|\tilde{u}\|_k \\ &\leq \varepsilon + C|\tilde{u}|_k \\ &\leq \varepsilon + C|\tilde{u} - u|_k + C|u|_k \\ &< \varepsilon(1 + C) + C|u|_k \end{aligned}$$

und folglich $\|u\|_k \leq C|u|_k$. ■

Bemerkungen

- In $\mathring{H}^k(\Omega)$ sind Norm und Seminorm äquivalent.
- Die Friedrichs-Ungleichung (4.7) bleibt richtig, falls Ω nur in einer Richtung beschränkt ist.

Der Dualraum $H^{-k}(\Omega)$

Definition 21 Der Dualraum von $\mathring{H}^k(\Omega)$, $k \geq 0$, ist der Raum $H^{-k}(\Omega)$ aller linearen stetigen Abbildungen $F : \mathring{H}^k(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, die $\mathring{H}^k(\Omega)$ in die Menge der reellen (oder komplexen) Zahlen abbilden, versehen mit der Norm

$$\|F\|_{H^{-k}(\Omega)} = \sup_{u \neq 0} \frac{|F(u)|}{\|u\|_k}.$$

Die Anwendung von F auf u wird auch als duale Paarung in der Form $\langle F, u \rangle = F(u)$ geschrieben.

Die Elemente aus $H^{-k}(\Omega)$, $k = 1, 2, \dots$ können wie folgt charakterisiert werden:

Lemma 4 [7, S.294] F ist aus $H^{-k}(\Omega)$ genau dann, wenn eine Familie $\{f_\alpha\}_{|\alpha| \leq k}$ von Funktionen $f_\alpha \in L_2(\Omega)$ existiert, so dass

$$F = \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha,$$

wobei $D^\alpha f_\alpha$ Distributionenableitungen sind.

Folgerung

Deltadistributionen als Dichte von Punktlasten gehören zu $H^{-1}(\Omega)$.

4.2 Stationäre Randwertprobleme und ihre schwache Formulierung

Die Differentialgleichungen werden als Operatorgleichungen aufgefaßt

$$Au = f \quad A: X \rightarrow Y. \quad (4.12)$$

Dabei werden die Randbedingungen durch die Wahl des Raumes X realisiert (z.B. genügen die Elemente u aus $\mathring{H}^1(\Omega)$ homogenen Dirichletbedingungen auf dem Rand). Falls X ein Hilbertraum ist und $Y = X'$ der Dualraum ist (Raum der linearen stetigen Funktionale auf X), dann ist (4.12) äquivalent zu

$$\langle Au, v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in X.$$

Es sei $a(u, v) := \langle Au, v \rangle$ eine Bilinearform auf $X \times X$. Die **schwache Formulierung** von (4.12) lautet:

Finde ein Element $u \in X$, so dass

$$a(u, v) := \langle f, v \rangle \quad \forall v \in X.$$

Beispiel

Wir betrachten das Dirichletproblem für die Poissongleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \quad (4.13)$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (4.14)$$

für ein $f \in L_2(\Omega)$.

Es sei

$$X = \mathring{H}^1(\Omega), X' = H^{-1}(\Omega) = [\mathring{H}^1(\Omega)]'.$$

Der Laplace-Operator ist nicht auf $\mathring{H}^1(\Omega)$ im klassischen Sinn definiert. Daher betrachten wir zunächst Elemente $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$ (beachte, dass $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $\mathring{H}^1(\Omega)$ ist) und $f \in L_2(\Omega)$.

Für diese Funktionen gilt

$$-(\Delta u, v)_{L_2(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)},$$

d.h.

$$-\int_{\Omega} \Delta uv \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx.$$

Nach der Greenschen Formel ist

$$-\int_{\Omega} \Delta uv \, dx = \int_{\Omega} \text{grad}u \cdot \text{grad}v \, dx = a(u, v). \quad (4.15)$$

Die schwache Formulierung des Randwertproblems (4.13), (4.14) lautet:

Finde $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ für ein $f \in H^{-1}(\Omega)$, so dass

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in \mathring{H}^1(\Omega) \quad (4.16)$$

gilt.

4.3 Bilinearformen und Lax-Milgram Lemma

Um Existenz, Eindeutigkeit und numerische Approximation von Lösungen schwach formulierter Probleme (Prinzip der virtuellen Arbeit) diskutieren zu können, müssen die Bilinearformen (wie sie z.B. in (4.16) auftreten) gewisse Eigenschaften haben.

Definition 22 Sei V ein Hilbertraum. Die Abbildung $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ wird *reelle Bilinearform* genannt, wenn

$$\begin{aligned} a(u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) &= \alpha_1 a(u, v_1) + \alpha_2 a(u, v_2), \\ a(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) &= \alpha_1 a(u_1, v) + \alpha_2 a(u_2, v) \end{aligned}$$

für alle $u, v, u_1, u_2, v_1, v_2 \in V, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ gilt. Die Bilinearform ist *stetig (beschränkt)*, falls ein $C > 0$ existiert, so dass

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V. \quad (4.17)$$

Lemma 5 [5, S.127], [4, S. 298]

Jedem linearen stetigen Operator $A : V \rightarrow V'$ kann eine stetige Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ zugeordnet werden, so dass

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle \quad \forall u, v \in V \quad (4.18)$$

ist. Umgekehrt entspricht jeder stetigen Bilinearform ein linearer stetiger Operator $A : V \rightarrow V'$, so dass (4.18) gilt (kurz $A \in L(V, V')$).

Lemma 6 (Lax-Milgram) [10, S. 38], [4, S. 297]

Sei $f \in V'$ und $a(\cdot, \cdot)$ eine Bilinearform auf $V \times V$, so dass

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V. \quad (4.19)$$

Falls Konstanten $C_1, C_2 > 0$ existieren, so dass gilt

$$|a(u, v)| \leq C_1 \|u\|_V \|v\|_V, \quad (4.20)$$

$$a(u, u) \geq C_2 \|u\|_V^2 \quad \forall u, v \in V, \quad (4.21)$$

dann besitzt (4.19) eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in V$ und es gilt die Abschätzung

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{C_2} \|f\|_{V'}.$$

Beweis

- Die Eindeutigkeit folgt aus der Ungleichung (4.21). Seien u_1 und u_2 schwache Lösungen, dann ist

$$a(u_1 - u_2, v) = \langle 0, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V$$

und damit für $v = u_1 - u_2$

$$0 \leq \|u_1 - u_2\|^2 \leq \frac{1}{C_2} a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0.$$

Es folgt $u_1 = u_2$ in V .

- Wir beweisen die Existenz einer Lösung $u \in V$ für ein beliebiges $f \in V'$. Dazu benötigen wir den Banachschen Fixpunktsatz und den Rieszschen Darstellungssatz.

Der Banachsche Fixpunktsatz lautet:

Sei M eine abgeschlossene nichtleere Teilmenge eines Banachraumes X , $T : M \subseteq X \rightarrow M$ sei eine Kontraktion, d.h. für ein $q \in [0, 1)$ gilt

$$\|Tx - Ty\|_X \leq q\|x - y\|_X, \quad \forall x, y \in M. \quad (4.22)$$

Dann besitzt T einen eindeutig bestimmten Fixpunkt x^* , d.h. $Tx^* = x^*$.

Der Rieszsche Darstellungssatz besagt:

Es sei H ein Hilbertraum und H' sein Dualraum. Dann existiert eine bijektive Abbildung $\tau : H' \rightarrow H$, so dass für alle $f \in H'$ gilt

$$\|\tau f\|_H = \|f\|_{H'} \quad (4.23)$$

$$\langle f, v \rangle = (\tau f, v)_H \quad \text{für alle } v \in H. \quad (4.24)$$

Wir betrachten jetzt die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ auf $V \times V$ und den linearen stetigen Operator $A : V \rightarrow V'$, der durch

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle$$

definiert ist. Aus (4.24) folgt für $f = Au$

$$(\tau Au, v)_V = \langle Au, v \rangle = a(u, v). \quad (4.25)$$

Wir erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned} c_2 \|v\|_V^2 \leq |a(v, v)| &= |(\tau Av, v)_V| \stackrel{\text{Schwarz}}{\leq} \|\tau Av\|_V \|v\|_V \\ &\stackrel{(4.23)}{=} \|Av\|_{V'} \|v\|_V \leq \|A\| \|v\|_V^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\|\tau \circ A\| \leq \|A\|, \quad c_2 \leq \|A\| \quad (4.26)$$

und

$$0 < \frac{c_2}{\|A\|} \leq 1. \quad (4.27)$$

Wir führen die Abbildung $T : V \rightarrow V$ ein

$$T(u) := u - k(\tau Au - \tau f),$$

wobei k eine reelle Zahl ist. Wir sehen sofort, u^* ist Fixpunkt von T , falls gilt

$$\tau Au^* = \tau f. \quad (4.28)$$

Da

$$a(u^*, v) = \langle Au^*, v \rangle \stackrel{(4.24)}{=} (\tau Au^*, v)_V \stackrel{(4.28)}{=} (\tau f, v)_V \stackrel{(4.24)}{=} \langle f, v \rangle$$

ist der Fixpunkt u^* schwache Lösung von $a(u, v) = \langle f, v \rangle$ und die Existenz der Lösung wäre gezeigt.

Wir überlegen nun, dass T bei einer bestimmten Wahl der Konstanten k einen Fixpunkt besitzt. Dazu überprüfen wir die Kontraktionseigenschaft (4.22):

$$\begin{aligned} \|Tu_1 - Tu_2\|_V^2 &= \|(u_1 - u_2) - k\tau A(u_1 - u_2), (u_1 - u_2) - k\tau A(u_1 - u_2)\|_V \\ &= \|u_1 - u_2\|_V^2 - 2k(\tau A(u_1 - u_2), u_1 - u_2)_V + k^2 \|\tau A(u_1 - u_2)\|_V^2 \\ &\stackrel{(4.25)}{=} \|u_1 - u_2\|_V^2 - 2ka(u_1 - u_2, u_1 - u_2) + k^2 \|\tau A(u_1 - u_2)\|_V^2 \\ &\stackrel{(4.26)}{=} \|u_1 - u_2\|_V^2 - 2kc_2 \|u_1 - u_2\|_V^2 + k^2 \|A\|^2 \|(u_1 - u_2)\|_V^2 \\ &= \|u_1 - u_2\|_V^2 (1 - 2kc_2 + k^2 \|A\|^2). \end{aligned}$$

Für $k = \frac{c_2}{\|A\|^2}$ ist $q^2 = 1 - 2kc_2 + k^2 \|A\|^2 \stackrel{(4.27)}{=} 1 - \frac{c_2^2}{\|A\|^2} \in [0, 1)$.

■

Spezialfall

Ist $a(\cdot, \cdot)$ symmetrisch, d.h. $a(u, v) = a(v, u)$, dann folgt aus (4.21), dass $a(\cdot, \cdot)$ auch ein Skalarprodukt auf $V \times V$ ist. In diesem Fall sprechen wir von einem energetischen Skalarprodukt und dem entsprechenden Energie-Raum. Da lineare stetige Funktionale aus V' auch lineare stetige Funktionale über dem Energie-Raum sind, ist der Satz von Riesz auf dem Energie-Raum anwendbar: zu jedem $f \in V'$ existiert ein Element $\tau f \in V$, so dass

$$\langle f, v \rangle = a(\tau f, v)$$

ist. Die Existenz einer schwachen Lösung ist in diesem Fall sehr einfach gezeigt worden.

Bemerkungen

- Die Voraussetzung (4.21) wird auch als V-Elliptizität bezeichnet.
- Unter den Voraussetzungen (4.20) und (4.21) besitzt der durch (4.18) zugeordnete Operator A eine stetige Inverse $A^{-1} \in L(V', V)$.

Beispiel

Wir kehren zum obigen Beispiel (4.16) zurück. Wir suchen ein $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$, so dass für ein $f \in H^{-1}(\Omega)$ gilt

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in \mathring{H}^1(\Omega).$$

Wir überlegen, dass (4.20) und (4.21) erfüllt sind. Die Bilinearform ist beschränkt. Mit Hilfe der Schwarzischen Ungleichung kann man folgende Abschätzung zeigen:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \right| &= \left| \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \partial_i u \partial_i v \, dx \right| = \left| \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \partial_i u \partial_i v \, dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_{L_2(\Omega)} \|\partial_i v\|_{L_2(\Omega)} \leq \left(\sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n \|\partial_i v\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |u|_{H^1(\Omega)} |v|_{H^1(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Die Bilinearform ist V-elliptisch. Dies folgt unmittelbar aus der Poincaré-Friedrichs Ungleichung (4.7)

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n (\partial_i u)^2 \, dx = |u|_1^2 \geq C_2 \|u\|_1^2.$$

Galerkin Lösungen

Sei $V_N \subset V$ ein endlichdimensionaler Teilraum von V ; z.B. kann V_N als Raum von stetigen, stückweise linearen Funktionen gewählt werden.

Definition 23 $u_N \in V_N$ ist Galerkin Lösung von (4.19), falls

$$a(u_N, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V_N \tag{4.29}$$

ist.

Die Berechnung von u_N kann durch Lösen eines linearen Gleichungssystems vorgenommen werden.

Sei $\{e_1, \dots, e_N\}$ eine Basis in V_N , z.B. sind e_i stetige stückweise lineare Funktionen mit $e_i(x_k, y_k) = \delta_{ik}$, wobei (x_k, y_k) Knotenpunkte (Eckpunkte) eines Dreieck-Gitters sind. Jedes Element $w \in V_N$ kann eindeutig dargestellt werden

$$w = \sum_{i=1}^N w_i e_i$$

mit dem Koeffizientenvektor $\vec{w} = (w_1, \dots, w_N)^\top \in \mathbb{R}^N$.

Lemma 7 Sei $M = (a(e_i, e_j))_{i,j}$ die Matrix und $\vec{f} = \langle f, e_i \rangle_{i=1 \dots N}$ der Vektor, die durch die Basiselemente beschrieben werden. Die Probleme

a) finde ein $\vec{w} \in \mathbb{R}^N$, so dass

$$M\vec{w} = \vec{f},$$

b) finde ein $w \in V_N$, so dass

$$a(w, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V_N$$

sind äquivalent.

Beweis

a) \vec{w} sei Lösung von $M\vec{w} = \vec{f}$, d.h.

$$\begin{pmatrix} a(e_1, e_1) & \dots & a(e_N, e_1) \\ \vdots & & \vdots \\ a(e_1, e_N) & \dots & a(e_N, e_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f, e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, e_N \rangle \end{pmatrix},$$

$$a(e_1 w_1 + \dots + e_N w_N, e_i) = a(w, e_i) = \langle f, e_i \rangle, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.30)$$

Wir multiplizieren die Gleichung $M\vec{w} = \vec{f}$ skalar mit einem Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$ und erhalten

$$\sum_{i=1}^N a(w, e_i) v_i = \sum_{i=1}^N \langle f, v_i e_i \rangle.$$

Es folgt für $v = \sum_{i=1}^N v_i e_i$

$$a(w, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V_N.$$

b) Sei $w \in V_N$ Lösung von

$$a(w, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V_N.$$

Mit $w = \sum_{j=1}^N w_j e_j$ und $v = e_i$ folgt die Relation (4.30). ■

Bemerkung

Es existiert eine eindeutig bestimmte Galerkin Lösung u_N , falls die Voraussetzungen des Lemmas von Lax-Milgram im Raum V erfüllt sind. Man beachte, dass $V_N \subset V$.

Der Fehler zwischen der schwachen Lösung $u \in V$ und seiner Galerkin Lösung $w = u_N \in V_N$ kann mit Hilfe des folgenden Lemmas abgeschätzt werden.

Lemma 8 (Céa, 64) Sei $a(\cdot, \cdot)$ eine Bilinearform auf $V \times V$ mit

$$|a(u, v)| \leq C_1 \|u\|_V \|v\|_V, \quad (4.31)$$

$$a(u, u) \geq C_2 \|u\|_V^2 \quad (4.32)$$

und $f \in V'$. Sei $u \in V$ eine schwache Lösung von (4.19), u_N eine Galerkin Lösung von (4.29). Dann ist

$$\|u - u_N\|_V \leq \frac{C_1}{C_2} \|u - v_N\|_V \quad \forall v_N \in V_N. \quad (4.33)$$

Beweis

Es gilt:

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V_N, \\ a(u_N, v) &= \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V_N \end{aligned}$$

und daher

$$a(u - u_N, v) = 0 \quad \forall v \in V_N. \quad (4.34)$$

Damit können wir abschätzen

$$\begin{aligned} \|u - u_N\|_V^2 &\stackrel{(4.32)}{\leq} \frac{1}{C_2} a(u - u_N, u - u_N) \stackrel{(4.34)}{=} \frac{1}{C_2} a(u - u_N, u - v_N) \\ &\stackrel{(4.31)}{\leq} \frac{C_1}{C_2} \|u - u_N\|_V \|u - v_N\|_V. \end{aligned}$$

Division durch $\|u - u_N\|_V \neq 0$ liefert die Behauptung (4.33). ■

Fehlerabschätzungen

Die Abschätzung (4.33) können wir auch in der Form

$$\|u - u_N\|_V \leq C \inf_{v_N \in V_N} \|u - v_N\|_V$$

schreiben. Das heißt die Galerkin Lösung u_N ist eine "beste" Approximation der Lösung u im Raum V_N .

Wählen wir eine Folge von Räumen V_N

$$V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_N \subset \dots \subset V$$

mit $\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$ dicht in V , dann konvergiert

$$\|u - u_N\|_V \rightarrow 0 \quad \text{für } N \rightarrow \infty.$$

Diese Fehlerabschätzung kann präzisiert werden, wenn wir die Räume V_N genauer beschreiben.

Lemma 9 [5, S. 169, Satz 8.4.4]

Sei V_N der Raum der stetigen, stückweise linearen Funktionen bezüglich einer zulässigen Triangulierung eines Polygons $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Sei $\alpha_0 > 0$ der kleinste Öffnungswinkel und h die längste Seite der Dreiecke. Dann ist

$$\inf_{v \in V_N} \|u - v\|_{H^k(\Omega)} \leq C(\alpha_0) h^{2-k} \|u\|_{H^2(\Omega)}$$

für $k = 0, 1$ und für alle $u \in H^2(\Omega) \cap V$.

Bemerkung

In Lemma 9 wurde angenommen, dass u glatt genug ist, d.h. $u \in H^2(\Omega)$. Diese Bedingung gilt für das Dirichlet Problem für den Laplace Operator, wenn f zu $L_2(\Omega)$ gehört und das Polygon Ω konvex ist. Für ein Polygon mit einspringenden Ecken gilt nur, dass $u \in H^{1+\frac{\pi}{\omega_0}-\varepsilon}(\Omega)$ ist, wobei $\omega_0 > \pi$ der größte innere Winkel ist.

Im nächsten Abschnitt beschreiben wir Sobolevräume mit reeller Ableitungsordnung.

Der Raum $W^{s,p}(\Omega)$ mit reellem $s > 0$ (Sobolev-Slobodeskij Raum)

Zur genauen Beschreibung des Verhaltens von Lösungen von partiellen Differentialgleichungen und insbesondere zur Beschreibung der zugelassenen Glattheit der Randdaten, benötigt man Räume, bei der die Ableitungsordnung nicht ganzzahlig ist.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $s > 0$, $s = k + \lambda$ mit $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 < \lambda \leq 1$. Wir erinnern zunächst an die Definition von k -mal Hölder-stetig differenzierbaren Funktionen:

$$C^{k,\lambda}(\bar{\Omega}) = \left\{ u \in C^k(\bar{\Omega}) : H_{\alpha,\lambda}(u) = \sup_{x,y \in \Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\lambda} < \infty \text{ für alle } \alpha \text{ mit } |\alpha| = k \right\}.$$

In $C^{k,\lambda}(\bar{\Omega})$ wird eine Norm eingeführt:

$$\|u\|_{C^{k,\lambda}(\bar{\Omega})} = \|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} H_{\alpha,\lambda}(u).$$

Es gilt $C^{k+1}(\bar{\Omega}) \subset C^{k,\lambda}(\bar{\Omega}) \subset C^k(\bar{\Omega})$ und damit nimmt $C^{k,\lambda}(\bar{\Omega})$ eine Zwischenposition ein. Diese Idee wird auf Sobolevräume übertragen, um nicht ganzzahlige Differentiationsordnungen zu erklären.

Definition 24 Der Raum

$$W^{s,p}(\Omega) := \left\{ u \in W^{k,p}(\Omega) : I_\alpha(u) = \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{n+p\lambda}} dx dy < \infty \text{ für alle } \alpha \text{ mit } |\alpha| = k \right\}$$

versehen mit der Norm

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}^p + \sum_{|\alpha|=k} I_\alpha(u) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

wird Sobolev-Slobodeskij-Raum genannt.

Für ganzzahlige k wurde $W^{k,p}$ in Definition 19 eingeführt.

Beispiel

Die Sprungfunktion einer reellen Variablen (siehe Abbildung 4.3)

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [-1, 1], \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gehört nicht zu $W^{1,2}(-2, 2)$, da $u'(x) = \delta_{-1}(x) + \delta_{+1}(x)$ im Distributionensinne ist. Jedoch ist $u \in W^{s,2}(-2, 2)$ für $0 \leq s < \frac{1}{2}$.



Abbildung 4.3: Sprungfunktion

Negative Ableitungsordnung

Definition 25 Sei $1 < p < \infty$, $s < 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. $W^{s,p}(\Omega)$ ist der Dualraum von $\overset{\circ}{W}^{-s,q}(\Omega)$, das heißt

$$W^{s,p}(\Omega) = (\overset{\circ}{W}^{-s,q}(\Omega))',$$

versehen mit der Norm

$$\|F\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \sup_{\substack{u \neq 0 \\ u \in \overset{\circ}{W}^{-s,q}(\Omega)}} \frac{|F(u)|}{\|u\|_{\overset{\circ}{W}^{-s,q}(\Omega)}}.$$

Spurräume

Um allgemein Randwertprobleme in Sobolevräumen behandeln zu können, müssen wir für Elemente aus $W^{k,p}(\Omega)$ Randdaten auf $\partial\Omega$ erklären. Da diese nicht immer im klassischen Sinn als Einschränkungen von stetigen Funktionen auf dem Rand definiert werden können, spricht man davon, dass die Randdaten im Spursinn angenommen werden. Diese befinden sich in so genannten Spurräumen und stimmen mit der klassischen Einschränkung überein, falls die Elemente aus $W^{k,p}(\Omega)$ glatt bis zum Rand sind. Die Hauptidee ist, einen Diffeomorphismus (differenzierbare eineindeutige Koordinatentransformation) zu betrachten, der lokal eine Umgebung des Randes geschnitten mit Ω in den Halbraum \mathbb{R}_+^n abbildet. Die Einschränkungen der transformierten Funktion auf \mathbb{R}^{n-1} werden dann untersucht. Dazu ist eine gewisse Glattheit des Randes $\partial\Omega$ erforderlich.

Satz 12 Sei $\Omega \in C^{k,1}$ und beschränkt, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $s \leq k + 1$, $s - \frac{1}{p} = l + \sigma$, $0 < \sigma < 1$, $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dann existiert eine eindeutige lineare, stetige, surjektive Abbildung

$$T_l : W^{s,p}(\Omega) \rightarrow \prod_{j=0}^l W^{s-j-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega),$$

so dass

$$T_l u = \left(u, \frac{\partial u}{\partial n}, \dots, \frac{\partial^l u}{\partial n^l} \right) \quad \forall u \in C^\infty(\bar{\Omega})$$

ist.

Hierbei ist \vec{n} der äußere Einheitsnormalenvektor an $\partial\Omega$, T_l wird Spuroperator genannt.

Folgerung für $p = 2$:

(i) Sei $\Omega \in C^{0,1}$. Die Abbildungen

$$\begin{aligned} T_0 : W^{1,2}(\Omega) &\rightarrow W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega), \\ T_0 : W^{\sigma+\frac{1}{2},2}(\Omega) &\rightarrow W^{\sigma,2}(\partial\Omega), \quad 0 < \sigma \leq \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

sind stetig und surjektiv.

(ii) Sei $\Omega \in C^{1,1}$. Dann sind die Spurooperatoren

$$\begin{aligned} T_0 : W^{\sigma+\frac{1}{2},2}(\Omega) &\rightarrow W^{\sigma,2}(\partial\Omega), \quad 0 < \sigma < 1, \\ T_1 : W^{\sigma+\frac{3}{2},2}(\Omega) &\rightarrow W^{\sigma+1,2}(\partial\Omega) \times W^{\sigma,2}(\partial\Omega), \quad 0 < \sigma \leq \frac{1}{2}, \\ T_1 : W^{2,2}(\Omega) &\rightarrow W^{\frac{3}{2},2}(\partial\Omega) \times W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega) \end{aligned}$$

stetig und surjektiv.

Bemerkungen

- Insbesondere gilt für Gebiete mit einem Lipschitz Rand ($k = l = 0, s = 1$)

$$\begin{aligned} T_0 : W^{1,p}(\Omega) &\rightarrow W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega), \\ T_0 : W^{s,p}(\Omega) &\rightarrow W^{s-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) \quad \text{für } \frac{1}{p} \leq s \leq 1. \end{aligned}$$

- Ist $s = m$ ganzzahlig, dann ist $l = m - 1$ für $\sigma = 1 - \frac{1}{p}$ und für $\Omega \in C^{m-1,1}$ ist

$$T_{m-1} : W^{m,p}(\Omega) \rightarrow \prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$$

eine lineare, stetige, surjektive Abbildung.

- Die Stetigkeit des Spurooperators ist äquivalent zu der Aussage:
Es existiert ein $C > 0$, so dass

$$\sum_{j=0}^l \left\| \frac{\partial^j u}{\partial n^j} \right\|_{W^{s-j-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{s,p}(\Omega)$$

ist.

- Die Elemente aus $\overset{\circ}{W}^{s,p}(\Omega)$ sind wie folgt charakterisiert:

$$\overset{\circ}{W}^{s,p}(\Omega) = \{u \in W^{s,p}(\Omega) : T_l u = 0\},$$

d.h. $u = \frac{\partial u}{\partial n} = \dots = \frac{\partial^l u}{\partial n^l} = 0$ auf $\partial\Omega$ im Spursinn.

- Ist $\Omega \in C^{0,1}$, dann ist $\overset{\circ}{W}^{1,2}(\Omega) = \{u \in W^{1,2}(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0 \text{ im Spursinn}\}$.

Fortsetzung vom Rand ins Gebiet

Der Spuroperator ist stetig rechts-invertierbar, d.h. es existiert eine stetige Rechts-Inverse von T_l , die den Elementen aus den Spurräumen Elemente aus den Sobolevräumen im Gebiet Ω zuordnet. Dieser Fortsetzungsoperator ist unabhängig von p .

Satz 13 (Fortsetzungssatz) *Es seien die Voraussetzungen von Satz 12 erfüllt. Dann existiert ein stetiger linearer Operator*

$$F_l : \prod_{j=0}^l W^{s-j-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) \rightarrow W^{s,p}(\Omega),$$

so dass für jedes Tupel $(u_0, u_1, \dots, u_l) \in \prod_{j=0}^l W^{s-j-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ mit $F_l(u_0, u_1, \dots, u_l) = v$ die Relationen

$$\frac{\partial^j v}{\partial n^j} = u_j \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad j = 0, 1, 2, \dots, l$$

gelten.

Bemerkungen

- Ein zu T_l rechtsinverser Operator F_l ist durch die Relation $T_l F_l = I_Y$ definiert, wobei Y der Bildraum und I_Y der identische Operator in Y sind. Er ist nicht eindeutig bestimmt. Die Stetigkeit besagt, dass eine Konstante $C > 0$ und Elemente $v \in W^{s,p}(\Omega)$ existieren, so dass

$$\begin{aligned} \|F_l(u_0, \dots, u_l)\|_{W^{s,p}(\Omega)} &= \|v\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C \sum_{j=0}^l \left\| \frac{\partial^j v}{\partial n^j} \right\|_{W^{s-j-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)} \\ &= C \sum_{j=0}^l \|u_j\|_{W^{s-j-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)} \end{aligned}$$

für alle Elemente $(u_0, u_1, \dots, u_l) \in \prod_{j=0}^l W^{s-j-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ ist.

4.4 Allgemeine Randwertprobleme für die Poissongleichung

Wir betrachten nun die angekündigten allgemeinen Randwertprobleme für die Poissongleichung

Das Dirichletproblem für die Poissongleichung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand, d.h. $\Omega \in C^{0,1}$. So kann Ω z.B. ein Polygon sein.

Klassische Formulierung

Die klassische Formulierung des Dirichletproblems für die Poissongleichung lautet:

Für $f \in C(\overline{\Omega})$, $g \in C(\partial\Omega)$ finde ein $u \in C^2(\overline{\Omega})$, so dass:

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad (4.35)$$

$$u = g \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (4.36)$$

gilt. Dieses Problem hat nicht immer eine Lösung in $C^2(\overline{\Omega})$.

Schwache Formulierung

Wir wollen eine schwache Formulierung für das Randwertproblem (4.35), (4.36) angeben. Dazu überführen wir zunächst (4.35), (4.36) in ein Randwertproblem mit homogenen Dirichletdaten in geeigneten Sobolevräumen. Sei $f \in W^{-1,2}(\Omega)$, $g \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$. Nach dem Fortsetzungssatz existiert ein $\hat{g} \in W^{1,2}(\Omega)$, so dass die Spur von \hat{g} auf $\partial\Omega$ mit g übereinstimmt. Wir stellen für die Funktion $w = u - \hat{g}$, $u \in W^{1,2}(\Omega)$, $w \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ ein neues schwaches Randwertproblem auf:

Finde ein $w \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega) = \mathring{H}^1(\Omega) = V$, so dass gilt

$$a(w, v) = \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle - a(\hat{g}, v) \quad \forall v \in V.$$

Dieses Problem ist sinnvoll, da die rechte Seite durch ein Funktional $F \in H^{-1}(\Omega)$ beschrieben werden kann:

$$\langle f, v \rangle - a(\hat{g}, v) = \langle F, v \rangle.$$

Die Voraussetzungen des Lemmas von Lax-Milgram sind erfüllt und es existiert eine eindeutig bestimmte Lösung $w \in V$. Setzen wir $u := w + \hat{g}$, dann gilt

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V, \\ u|_{\partial\Omega} &= g \quad \text{im Spursinn.} \end{aligned}$$

Das Neumannproblem für die Poissongleichung

Wir beginnen mit der klassischen Formulierung: Gesucht ist ein $u \in C^2(\bar{\Omega})$, so dass für $f \in C(\bar{\Omega})$, $g \in C(\partial\Omega)$

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad \text{in } \Omega, \tag{4.37}$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} = g(x) \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{4.38}$$

gilt. Aus der ersten Greenschen Formel ($-\int_{\Omega} \Delta u v = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v$) folgt, dass dieses Problem nur lösbar ist, falls:

$$\int_{\Omega} f(x) \, dx + \int_{\partial\Omega} g(x) \, d\sigma(x) = 0. \tag{4.39}$$

Weiterhin gilt: falls eine Lösung aus $C^2(\bar{\Omega})$ existiert, so ist diese nur bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.

Diese Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen werden auch bei der Untersuchung des schwach formulierten Problems eine Rolle spielen.

Schwache Formulierung

Sei $f \in (W^{1,2}(\Omega))'$, $g \in W^{-\frac{1}{2},2}(\partial\Omega) = (W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega))'$, $\Omega \in C^{0,1}$.

Die schwache Formulierung lautet: Finde ein $u \in W^{1,2}(\Omega)$, so dass gilt

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle_{\Omega} + \langle g, Tv \rangle_{\partial\Omega} \quad \forall v \in W^{1,2}(\Omega). \tag{4.40}$$

Hierbei ist $T = T_0 : W^{1,2}(\Omega) \rightarrow W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$ der Spuroperator und $\langle g, Tv \rangle_{\partial\Omega}$ ist als Anwendung des Funktionals $g \in W^{-\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$ auf $Tv \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$ zu verstehen. Die rechte Seite ist insgesamt durch ein lineares und stetiges Funktional aus $(W^{1,2}(\Omega))'$ darstellbar. Es gilt nämlich nach dem Spursatz

$$|\langle G, v \rangle_{\Omega}| := |\langle g, Tv \rangle_{\partial\Omega}| \leq \|g\|_{(W^{-\frac{1}{2},2}(\partial\Omega))'} \|Tv\|_{W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)} \leq c \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}.$$

Die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ ist stetig auf $W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega)$. Sie ist jedoch nicht $W^{1,2}(\Omega)$ -elliptisch. Um dies zu sehen, betrachte man $u = c \equiv \text{const} \neq 0$. Es ist:

$$a(c, c) = \int_{\Omega} \nabla c \cdot \nabla c \, dx = 0 \not\geq c_2 \|c\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 = c_2 \int_{\Omega} |c|^2 \, dx > 0.$$

Um die V -Elliptizität zu retten, muss der Raum $W^{1,2}(\Omega)$ durch den Faktorraum $W^{1,2}(\Omega)/\{\mathbb{R}\} = V$ ersetzt werden.

Die Elemente aus V sind Äquivalenzklassen, deren Elemente sich durch konstante Funktionen $c(x) \equiv c, c \in \mathbb{R}$, unterscheiden, d.h. $v(x) \sim u(x) \Leftrightarrow u(x) = v(x) + c$.

Lemma 10

- a) In den Äquivalenzklassen aus V gibt es genau einen Vertreter v , so dass $\int_{\Omega} v(x) \, dx = 0$ ist.
- b) Jede Äquivalenzklasse aus V enthält genau einen Vertreter w , so dass $\int_{\partial\Omega} w(x) \, d\sigma = 0$ ist.

Beweis

- a) Wir betrachten eine Äquivalenzklasse aus V und greifen ein Element v_0 heraus. Es gibt eine Konstante c , so dass gilt

$$\int_{\Omega} v_0(x) \, dx = c \, \text{meas}(\Omega).$$

Die Funktion $v = v_0 - c$ hat die Eigenschaft

$$\int_{\Omega} (v_0 - c) \, dx = 0.$$

- b) Diese Aussage kann analog zu a) gezeigt werden. ■

Wir können also den Faktorraum V wie folgt charakterisieren:

- a) $V_{\Omega} = \{v \in W^{1,2}(\Omega) : \int_{\Omega} v \, dx = 0\}$,
- b) $V_{\partial\Omega} = \{v \in W^{1,2}(\Omega) : \int_{\partial\Omega} v \, d\sigma = 0\}$.

Lemma 11 In V_{Ω} und $V_{\partial\Omega}$ gilt: Es existiert eine Konstante $c > 0$, so dass:

$$\|v\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq c |v|_{W^{1,2}(\Omega)}.$$

Beweis [18, S. 382], [7, S. 298, 382 ff]

Wir erinnern an folgende Poincarésche Ungleichungen (4.8),(4.9)

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq c \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx + \left| \int_{\Omega} u dx \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq c \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx + \left| \int_{\partial\Omega} u(x) d\sigma \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

■

Folgerung

Das schwach formulierte Neumannproblem ist eindeutig lösbar in V_{Ω} bzw. $V_{\partial\Omega}$:

Finde ein $u \in V_{\Omega}$, bzw. $u \in V_{\partial\Omega}$, so dass

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \langle f, v \rangle_{\Omega} + \langle g, Tv \rangle_{\partial\Omega} \quad (4.41)$$

für alle $v \in V_{\Omega}$ (bzw. für alle $v \in V_{\partial\Omega}$), für jedes Paar $f \in V'_{\Omega}$, $g \in (TV_{\Omega})'$ bzw. $f \in V'_{\partial\Omega}$, $g \in (TV_{\partial\Omega})'$. Hier ist T der Spuroperator.

Bemerkung

Im allgemeinen ist die Spur $\frac{\partial u}{\partial n}$ für Elemente aus $W^{1,2}(\Omega)$ nicht definiert. Jedoch kann gezeigt werden, dass für Lösungen des Neumannproblems $\frac{\partial u}{\partial n} \in W^{-\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$ ist und in diesem Sinn die Randwertannahme gesichert ist.

Das Robinproblem (3. Randwertproblem) für die Poissongleichung

Das klassische Robin-Problem (auch Newton-Problem genannt) lautet:

Finde ein $u \in C^2(\bar{\Omega})$, so dass für ein $f \in C(\bar{\Omega})$ und $g \in C(\partial\Omega)$ gilt

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad \text{in } \Omega, \quad (4.42)$$

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial n}(x) + \beta u(x) = g(x) \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (4.43)$$

Wir nehmen an, dass α und β positive reelle Zahlen sind und geben eine schwache Formulierung für das Problem (4.42), (4.43) an. Dazu nehmen wir an, dass $f \in (W^{1,2}(\Omega))'$ und $g \in (W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega))'$ sind. Nach skalarer Multiplikation von (4.42) mit Elementen aus $W^{1,2}(\Omega)$ und partieller Integration sowie unter Beachtung der Randbedingung (4.43) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} Tv d\sigma + \langle f, v \rangle_{\Omega} \\ &= \left\langle \frac{g}{\alpha}, Tv \right\rangle_{\partial\Omega} + \langle f, v \rangle_{\Omega} - \int_{\partial\Omega} \frac{\beta}{\alpha} u v d\sigma. \end{aligned}$$

Die schwache Formulierung von (4.42), (4.43) lautet daher:

Finde ein $u \in W^{1,2}(\Omega)$, so dass

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \frac{\beta}{\alpha} \int_{\partial\Omega} uv \, d\sigma = \langle f, v \rangle_{\partial\Omega} + \left\langle \frac{g}{\alpha}, T_0 v \right\rangle_{\partial\Omega}$$

für alle $v \in W^{1,2}(\Omega)$ ist.

Wir überprüfen, ob die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ stetig und $W^{1,2}(\Omega)$ -elliptisch ist.

- Die Bilinearform ist beschränkt. Wir haben nur zu zeigen, dass

$$\left| \int_{\partial\Omega} uv \, d\sigma \right| \leq C \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}$$

ist.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Omega} uv \, d\sigma \right| &\stackrel{\text{Schwarz}}{\leq} \|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\leq \|u\|_{W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)} \|v\|_{W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}. \end{aligned}$$

- Wir sehen uns jetzt die V -Elliptizität an:

$$\begin{aligned} |a(u, u)| &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u \, dx + \frac{\beta}{\alpha} \int_{\partial\Omega} |u|^2 \, d\sigma \\ &= \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 + \frac{\beta}{\alpha} \int_{\partial\Omega} |u|^2 \, d\sigma \\ &\stackrel{(4.9)}{\geq} C \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Das gemischte Randwertproblem für die Poissongleichung

Sei $\Omega \in C^{0,1}$. Das gemischte Randwertproblem für die Poissongleichung lautet: Es ist eine Funktion u zu finden, so dass

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad \text{in } \Omega, \quad (4.44)$$

$$u(x) = g_1(x) \quad \text{auf } \Gamma_1 \subset \partial\Omega, \quad (4.45)$$

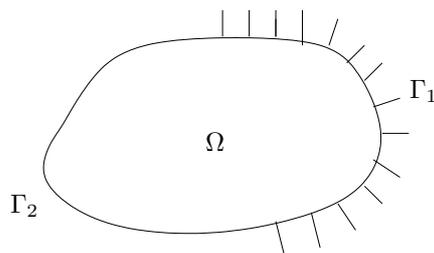
$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = g_2(x) \quad \text{auf } \Gamma_2 \subset \partial\Omega, \quad (4.46)$$

wobei Γ_1 und Γ_2 offene Randstücke von $\partial\Omega$ sind, so dass $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 = \partial\Omega$ ist.

Zunächst transformieren wir die Dirichlet-Randbedingung (4.45) in eine homogene Randbedingung. Dazu müssen wir Spurräume auf Teilstücken des Randes einführen.

Definition 26 Es sei

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) = W^{\frac{1}{2},2}(\Gamma_1) = \{u = Tv|_{\Gamma_1}, Tv \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)\}$$

Abbildung 4.4: Das Gebiet Ω

versehen mit der Norm

$$\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = \inf_{\substack{Tv \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega) \\ u=Tv|_{\Gamma_1}}} \|Tv\|_{W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)}.$$

Weiterhin sei

$$\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) = \{u \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega) : \text{supp } u \subset \bar{\Gamma}_1\}$$

versehen mit der Norm

$$\|u\|_{\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = \|\tilde{u}\|_{W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)},$$

wobei \tilde{u} die Null-Fortsetzung von u auf $\partial\Omega$ ist.

Die Dualräume seien

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) &= (H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))', \\ H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) &= (\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))'. \end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass $g_1 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ und $g_2 \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$ sind. Zu g_1 gibt es eine Fortsetzung $G_1 \in W^{1,2}(\Omega)$, so dass $TG_1|_{\Gamma_1} = g_1$ ist. Für die Funktion $w = u - G_1 \in W^{1,2}(\Omega)$ gilt, dass $Tw|_{\Gamma_1} = 0$ ist. Ein geeigneter Raum V , in dem die schwache Lösung w gesucht wird, ist daher:

$$V = \{w \in W^{1,2}(\Omega) : Tw|_{\Gamma_1} = 0\}. \quad (4.47)$$

Wir formulieren jetzt das schwache Randwertproblem (4.44), (4.45) und (4.46) für die Funktion $w = u - G_1$:

Für $f \in V'$, $g_1 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, $g_2 \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$, finde ein $w \in V$, so dass:

$$a(w, v) = \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle_{\Omega} - a(G_1, v) + \langle g_2, v \rangle_{\Gamma_2} \quad \forall v \in V$$

ist.

Wir überprüfen die Voraussetzungen des Satzes von Lax-Milgram:

- (1) $a(\cdot, \cdot)$ ist beschränkt über $V \times V \subset W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega)$.
- (2) $a(\cdot, \cdot)$ ist V -elliptisch, da nach der Poincaréschen Ungleichung ([18, S. 385/386])

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C \left(\int_{\Gamma_1} |u|^2 d\sigma + |u|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

gilt, falls $\mu(\Gamma_1) > 0$ ist. Daraus folgt:

$$a(w, w) = \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla w \, dx = |w|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 \geq \tilde{C} \|w\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 \quad \forall w \in V. \quad (4.48)$$

Ein Transmissionsproblem für die Poissongleichung

Sei Ω ein Gebiet des \mathbb{R}^n , das aus zwei Teilgebieten $\Omega_1 \in C^{0,1}$ und $\Omega_2 \in C^{0,1}$ besteht, welche im Allgemeinen aus unterschiedlichen Materialien sind und es gilt:

$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset.$$

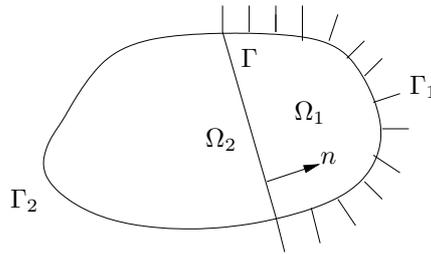


Abbildung 4.5: Das zusammengesetzte Gebiet

Es sei $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ die Grenzlinie (interface) zwischen Ω_1 und Ω_2 und $\Gamma_1 = \partial\Omega_1 \setminus \bar{\Gamma}$, $\Gamma_2 = \partial\Omega_2 \setminus \bar{\Gamma}$ die äußeren Randstücke von Ω_1 bzw. Ω_2 .

Wir suchen Lösungen u_i , so dass

$$-a_i \Delta u_i = f_i \quad \text{in } \Omega_i, \quad (4.49)$$

$$u_1 = g_1 \quad \text{auf } \Gamma_1, \quad (4.50)$$

$$a_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} = g_2 \quad \text{auf } \Gamma_2, \quad (4.51)$$

$$u_1 - u_2 = 0 \quad \text{auf } \Gamma, \quad (4.52)$$

$$a_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} - a_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } \Gamma, \quad (4.53)$$

wobei a_1 und a_2 positive Konstanten sind.

Wir führen eine schwache Formulierung ein, indem wir zunächst annehmen, dass alle auftretenden Funktionen u_i, f_i und $g_i, i = 1, 2$, genügend glatt sind.

Wir bezeichnen mit u die Funktion

$$u = \begin{cases} u_1 & \text{in } \Omega_1 \\ u_2 & \text{in } \Omega_2. \end{cases}$$

Gilt $u_1 = u_2$ auf Γ , dann ist $u \in W^{1,2}(\Omega)$.

Weiterhin sei $V = \{v \in W^{1,2}(\Omega) : v|_{\Gamma_1} = 0\}$ und $v_i = v|_{\Omega_i}, i = 1, 2$.

Nun ist

$$\begin{aligned} -a_i \int_{\Omega_i} \Delta u_i v_i \, dx = \langle f_i, v_i \rangle &= a_i a(u_i, v_i) - \int_{\partial\Omega_i} a_i \frac{\partial u_i}{\partial n} v_i \, d\sigma \\ &= a_i a(u_i, v_i) - \int_{\Gamma_i} a_i \frac{\partial u_i}{\partial n} v_i \, d\sigma - \int_{\Gamma} a_i \frac{\partial u_i}{\partial n} v_i \, d\sigma, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Für

$$a_\Omega(u, v) = a_1 a(u_1, v_1) + a_2 a(u_2, v_2), \quad v \in V$$

gilt

$$\begin{aligned} a_\Omega(u, v) &= \langle f, v \rangle + \int_{\Gamma_2} g_2 v_2 \, d\sigma + \int_{\Gamma} (a_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} v_1 - a_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} v_2) \, d\sigma \\ &= \langle f, v \rangle + \langle g_2, v_2 \rangle_{\Gamma_2}. \end{aligned}$$

Um nun einen gemeinsamen Ansatz- und Testraum zu haben, gehen wir zu homogenen Dirichlet-Randdaten über. Sei $g_1 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$. Dann existiert eine Fortsetzung $G \in W^{1,2}(\Omega)$, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma$. Sei $w = u - G$. Dann gilt

$$\begin{aligned} a_\Omega(w, v) &= a_\Omega(u, v) - a_\Omega(G, v) \\ &= \langle f, v \rangle + \langle g_2, v_2 \rangle_{\Gamma_2} - a_\Omega(G, v). \end{aligned}$$

Die schwache Formulierung von (4.49) - (4.53) lautet:

Finde ein $w \in V$, so dass für $f \in V'$, $g_2 \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$, $g_1 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$

$$a_\Omega(w, v) = \langle f, v \rangle + \langle g_2, v_2 \rangle_{\Gamma_2} - a_\Omega(G, v) \quad \forall v \in V \quad (4.54)$$

ist.

$a_\Omega(\cdot, \cdot)$ genügt den Voraussetzungen des Satzes von Lax-Milgram.

Wir überprüfen die V -Elliptizität:

$$a_\Omega(w, w) = |w|_{H^1(\Omega)}^2 \stackrel{(4.9)}{\geq} \|w\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Die rechte Seite von (4.54) stellt ein lineares stetiges Funktional auf V dar.

4.5 Anfangs- Randwertprobleme und ihre schwache Lösung

Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten zunächst ein Anfangs-Randwertproblem für die Wärmeleitungsgleichung im Gebiet $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $T > 0$ beliebig:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - a^2 \Delta u(x, t) = f(x, t) \quad \text{in } Q_T = \Omega \times (0, T) \quad (4.55)$$

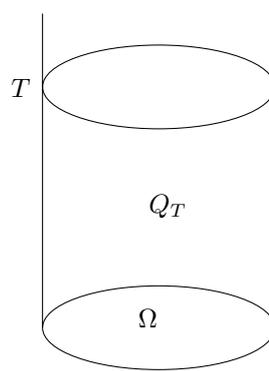
$$u(x, t) = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times (0, T) \quad (4.56)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{auf } \Omega. \quad (4.57)$$

Wir nehmen für einen Moment an, dass für festes $t > 0$ (t spielt die Rolle eines Parameters) $f(\cdot, t)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t)$, $\Delta u(\cdot, t)$, u_0 Funktionen aus $L_2(\Omega)$ sind. Wir multiplizieren (4.55) und (4.56) mit einer Testfunktion $v \in \overset{\circ}{H}^1(\Omega) = V$ und integrieren über Ω . Nach partieller Integration erhalten wir

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) v(x) \, dx + a^2 \int_{\Omega} \nabla u(x, t) \nabla v(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x, t) v(x) \, dx, \quad (4.58)$$

$$\int_{\Omega} u(x, 0) v(x) \, dx = \int_{\Omega} u_0(x) v(x) \, dx. \quad (4.59)$$

Abbildung 4.6: Raum-Zeit-Zylinder Q_T

(4.58) und (4.59) können 'abstrakt' formuliert werden: Suche ein u , so dass

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial u(t)}{\partial t}, v \right\rangle + a(t, u, v) &= \langle f(t), v \rangle, \\ \langle u(0), v \rangle &= \langle u_0, v \rangle \quad \forall v \in \mathring{H}^1(\Omega). \end{aligned}$$

In unserem Fall der Wärmeleitungsgleichung ist $a(t, u, v) = a^2 \int_{\Omega} \nabla_x u(t, x) \nabla_x v(t, x) dx$.

Im allgemeinen Fall ist

$$a(t, u, v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ji}(x, t) u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) u_{x_i} v + c(x, t) uv \right) dx.$$

Diese 'abstrakte' Formulierung wird mathematisch korrekt, wenn wir geeignete Funktionenräume, in denen sich u , f und u_0 befinden, einführen.

Dazu ist es vorteilhaft, u als Abbildung aufzufassen, die jedem $t \in [0, T]$ ein Element aus $\mathring{H}^1(\Omega)$ zuordnet

$$\begin{aligned} u : [0, T] &\rightarrow \mathring{H}^1(\Omega) = V, \\ u(t)(x) &:= u(x, t). \end{aligned}$$

Diese Betrachtungsweise besagt, dass die Zeit t als Parameter aufgefasst wird und u eine Funktion des Parameters t ist mit Werten im Funktionenraum V .

Das Anfangswertproblem kann dann auch als Operatorgleichung

$$\frac{du}{dt} - A(t)u = f(t) \quad \text{für } t \in (0, T), \quad (4.60)$$

$$u(0) = u_0 \quad (4.61)$$

geschrieben werden. In unserem Fall ist $A(t) = A = a^2 \Delta$ ein Operator von V in V' , im allgemeinen Fall ist $A(t) = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ji}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i}) + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x, t)u$, sowie $f(t) \in V'$ für ein festes t . Um das Verhalten der Daten f und u_0 und der Lösung u auch bezüglich der Zeit beschreiben zu können, führen wir geeignete Funktionenräume ein.

Definition 27 Sei X ein Banachraum. Wir definieren:

$$L_2((0, T), X) = \{u : (0, T) \rightarrow X : \|u\|_{L_2((0, T), X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty\},$$

$$H^1((0, T), X) = \{u \in (0, T) \rightarrow X : \|u\|_{H^1((0, T), X)} = \left(\int_0^T (\|u(t)\|_X^2 + \|\frac{du}{dt}\|_X^2) dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty\}.$$

Das allgemeine schwache Rand-Anfangswert-Problem

Für $f \in L_2((0, T), V')$, $u_0 \in L_2(\Omega)$ finde ein $u \in L_2((0, T), V) \cap H^1((0, T), V')$, so dass für alle $t \in (0, T)$ gilt:

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t), v \right\rangle + a(t, u, v) = \langle f(\cdot, t), v \rangle, \quad (4.62)$$

$$\langle u(\cdot, 0), v \rangle = \langle u_0, v \rangle \quad \forall v \in V. \quad (4.63)$$

Satz 14 (Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen)

[11, S. 379 ff],[4, S. 350 ff],[21, S. 383]

Es sei $a(t, \cdot, \cdot)$ eine beschränkte, parameterabhängige Bilinearform auf $V \times V$, so dass $\langle A(t)u, v \rangle = a(t, u, v)$ ist. Es gelte

$$(i) |a(t, u, v)| \leq C_1 \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V,$$

$$(ii) a(t, u, u) \geq C_2 \|u\|_V^2 - C_3 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad \forall u \in V,$$

(iii) $a(t, u, v)$ ist messbar bezüglich t für festes u und $v \in V$.

Hierbei hängen die Konstanten C_1, C_2 und C_3 nicht von t ab. Dann hat das schwache Problem (4.62),(4.63) genau eine Lösung. Diese befindet sich sogar in $C([0, T], L_2(\Omega)) = \{u : [0, T] \rightarrow L_2(\Omega), u \text{ ist stetig bezüglich } t \text{ und } \|u\|_{C([0, T], L_2(\Omega))} = \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{L_2(\Omega)} < \infty\}$.

Bemerkung

In unserem Beispiel ist $A(t) = a^2 \Delta$ und $a(t, u, v) = a^2 \int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, dx$.

Beweisskizze von Satz 14

1. Schritt: Existenz von Galerkin Lösungen

Es sei $(e_k)_{k=1,2,\dots}$ eine abzählbare Basis in $\overset{\circ}{H}^1(\Omega) = V$, die ein orthonormales System in $L_2(\Omega)$ bildet, d.h.

$$\int_{\Omega} e_k(x) e_j(x) \, dx = \delta_{kj} \quad \text{für } j, k = 1, 2, \dots$$

(Man betrachte als Beispiel das Funktionensystem $\left(\sqrt{\frac{L}{2}} \sin \frac{k\pi}{L} x \right)_{k=1,2,\dots}$ für $\Omega = (0, L)$.)

Sei N eine ganze positive Zahl. Wir betrachten die Abbildung

$$u_N : [0, T] \rightarrow \mathring{H}^1(\Omega) = V, \quad u_N(t) := \sum_{j=1}^N w_{N,j}(t)e_j, \quad (4.64)$$

wobei die Funktionen $w_{N,j} \in H^1(0, T)$ so zu bestimmen sind, dass

$$\left(\frac{du_N}{dt}, e_k \right)_{L_2(\Omega)} + a(t, u_N, e_k) = \langle f, e_k \rangle = f_k(t), \quad (4.65)$$

$$(u_N(0), e_k)_{L_2(\Omega)} = (u_0, e_k)_{L_2(\Omega)} = u_{0k} \quad (4.66)$$

für $k = 1, 2, \dots, N$ ist.

Nach Einsetzen von u_N erhalten wir folgendes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit einer Anfangsbedingung zur Bestimmung der Koeffizienten $w_{N,k}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} w_{N,k}(t) + \sum_{j=1}^N a(t, e_j, e_k) w_{N,j}(t) &= f_k(t), \\ w_{N,k}(0) &= u_{0k}. \end{aligned}$$

Mit den Bezeichnungen $\vec{w}_N(t) = (w_{N,1}(t), \dots, w_{N,N}(t))^T$, $\vec{f}_N(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_N(t))^T$, $\vec{u}_{0N} = (u_{01}, \dots, u_{0N})^T$ und $A_N(t) = (a(t, e_j, e_k))_{j,k=1, \dots, N}$ lautet das Anfangswertproblem in Vektor-Matrix-Schreibweise:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{w}_N(t) + A_N(t) \vec{w}_N(t) &= \vec{f}_N(t), \\ \vec{w}_N(0) &= \vec{u}_{0N}. \end{aligned}$$

Dieses System besitzt eine eindeutige Lösung in $[H^1(0, t)]^N$ und damit ist u_N sinnvoll durch (4.64) definiert. Führen wir den endlichdimensionalen Raum V_N als lineare Hülle der Basisselemente e_1, \dots, e_N ein, dann ist u_N Galerkin Lösung in V_N . Aus (4.65) und (4.66) folgt nämlich

$$\left(\frac{du_N}{dt}, v \right)_{L_2(\Omega)} + a(t, u_N, v) = \langle f, v \rangle, \quad (4.67)$$

$$(u_N(0), v)_{L_2(\Omega)} = (u_0, v)_{L_2(\Omega)} \quad \forall v \in V_N. \quad (4.68)$$

2. Schritt: Beschränktheit der Folge von Galerkin Lösungen

Mit Hilfe der Voraussetzungen und einer Ungleichung von Gronwall kann man zeigen, dass die Folge der Galerkin Lösungen $\{u_N\}_{N=1,2, \dots}$ gleichmäßig beschränkt ist. Wir folgen dabei den Ausführungen in [4].

Satz 15 *Es existiert eine Konstante $C > 0$, die nur von Ω, T und den Konstanten C_1, C_2, C_3 in (i) und (ii) abhängt, so dass für $N = 1, 2, \dots$*

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} \|u_N(t)\|_{L_2(\Omega)} + \|u_N\|_{L_2((0,T),V)} + \left\| \frac{\partial u_N}{\partial t} \right\|_{L_2((0,T),V')} \\ \leq C \left[\|f\|_{L_2((0,T),L_2(\Omega))} + \|u_0\|_{L_2(\Omega)} \right]. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Beweis

a) Wir starten mit der Gronwallschen Ungleichung:

Sei $\eta = \eta(t) \geq 0$ eine absolut stetige Funktion auf $[0, T]$, d.h. $\dot{\eta}(t)$ existiert f.ü. und

ist integrierbar. Weiterhin seien $\phi(t) \geq 0, \psi(t) \geq 0$ integrierbare Funktionen auf $[0, T]$.
Falls

$$\dot{\eta}(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t), \quad (4.70)$$

dann gilt auf $[0, T]$:

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s) ds} [\eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds]. \quad (4.71)$$

Falls gilt

$$\dot{\eta}(t) \leq \phi(t)\eta(t) \text{ und } \eta(0) = 0, \quad (4.72)$$

dann ist $\eta \equiv 0$ auf $[0, T]$.

Wir zeigen diese Ungleichung:

Es gilt für $0 \leq s \leq T$:

$$\frac{d}{ds} (\eta(s) e^{-\int_0^s \phi(r) dr}) = e^{-\int_0^s \phi(r) dr} [\eta'(s) - \phi(s)\eta(s)] \leq e^{-\int_0^s \phi(r) dr} \psi(s).$$

Integrieren wir diese Ungleichung $\int_0^t \dots ds$, so erhalten wir

$$\int_0^t \frac{d}{ds} (\eta(s) e^{-\int_0^s \phi(r) dr}) ds = \eta(t) e^{-\int_0^t \phi(r) dr} - \eta(0) \leq \int_0^t \underbrace{e^{-\int_0^s \phi(r) dr}}_{\leq 1} \psi(s) ds.$$

Es folgt

$$\eta(t) e^{-\int_0^t \phi(r) dr} \leq \eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds.$$

Somit gilt (4.71).

b) Wir zeigen

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u_N(t)\|_{L_2(\Omega)} \leq C [\|f\|_{L_2((0,T), L_2(\Omega))} + \|u_0\|_{L_2(\Omega)}].$$

Wählen wir in (4.67) $v = u_N$, so erhalten wir

$$\left(\frac{du_N}{dt}, u_N\right)_{L_2(\Omega)} + a(t, u_N, u_N) = (f, u_N)_{L_2(\Omega)}. \quad (4.73)$$

Nach Voraussetzung (ii) gilt

$$a(t, u_N, u_N) \geq C_2 \|u_N\|_{H^1(\Omega)}^2 - C_3 \|u_N\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (4.74)$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \left(\frac{du_N}{dt}, u_N\right)_{L_2(\Omega)} + 2C_2 \|u_N\|_{H^1(\Omega)}^2 &\stackrel{(4.74)}{\leq} \left(\frac{\partial u_N}{\partial t}, u_N\right)_{L_2(\Omega)} \\ &\quad + 2a(t, u_N, u_N) + 2C_3 \|u_N\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ &\stackrel{(4.73)}{=} \left(\frac{\partial u_N}{\partial t}, u_N\right)_{L_2(\Omega)} + 2(f, u_N)_{L_2(\Omega)} \\ &\quad - 2\left(\frac{\partial u_N}{\partial t}, u_N\right)_{L_2(\Omega)} + 2C_3 \|u_N\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ &\leq -\left(\frac{\partial u_N}{\partial t}, u_N\right)_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(\Omega)} \\ &\quad + \|u_N\|_{L_2(\Omega)}^2 + 2C_3 \|u_N\|_{L_2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Hier haben wir benutzt, dass

$$(f \pm u_N, f \pm u_N)_{L_2(\Omega)} = (f, f)_{L_2(\Omega)} \pm 2(f, u_N)_{L_2(\Omega)} + (u_N, u_N)_{L_2(\Omega)} \geq 0 \quad (4.76)$$

ist, und daher gilt

$$2|(f, u_N)_{L_2(\Omega)}| \leq (f, f)_{L_2(\Omega)} + (u_N, u_N)_{L_2(\Omega)}. \quad (4.77)$$

Aus der Ungleichung (4.75) folgt

$$2\left(\frac{du_N}{dt}, u_N\right)_{L_2(\Omega)} + 2C_2\|u_N\|_V^2 \leq \|f\|_{L_2(\Omega)}^2 + (1 + 2C_3)\|u_N\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (4.78)$$

Da $2\left(\frac{du_N}{dt}, u_N\right)_{L_2(\Omega)} = \frac{d}{dt}\|u_N\|_{L_2(\Omega)}^2$ ist, gilt für $\eta = \|u_N(t)\|_{L_2(\Omega)}^2$

$$\eta'(t) \stackrel{(4.78)}{\leq} \|f\|_{L_2(\Omega)}^2 + C_4\eta(t).$$

Die Gronwallsche Ungleichung (4.71) liefert (setze $\phi(s) = C_4$, $\psi(t) = \|f(t)\|_{L_2(\Omega)}^2$)

$$\eta(t) \leq e^{C_4 t} \left(\eta(0) + \int_0^t \|f(s)\|_{L_2(\Omega)}^2 ds \right). \quad (4.79)$$

Nun ist nach (4.64)

$$\begin{aligned} u_N(t) &= \sum_{j=1}^N w_{N,j}(t) e_j \\ u_N(0) &= \sum_{j=1}^N w_{N,j}(0) e_j \end{aligned}$$

und nach (4.66)

$$(u_N(0), e_k(x))_{L_2(\Omega)} = w_{N,k}(0) = (u_0, e_k)_{L_2(\Omega)}$$

und daher

$$\|u_N(0)\|_{L_2(\Omega)}^2 = \sum_{j=1}^N w_{N,j}^2(0) \leq \|u_0\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Damit lautet (4.79)

$$\begin{aligned} \eta(0) &= \|u_N(0)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \|u_0\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ \eta(t) &\leq e^{C_4 t} \left(\|u_0\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|f(s)\|_{L_2(\Omega)}^2 ds \right) \end{aligned}$$

und

$$\max_{0 \leq t \leq T} \eta(t) = \max_{0 \leq t \leq T} \|u_N(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C[\|u_0\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L_2((0,T),L_2(\Omega))}^2]. \quad (4.80)$$

Damit ist die Abschätzung in (4.69) bewiesen.

c) Wir zeigen, dass

$$\|u_N\|_{L_2((0,T),V)} \leq C(\|f\|_{L_2((0,T),L_2(\Omega))} + \|u_0\|_{L_2(\Omega)}).$$

gilt. (4.78) liefert uns unmittelbar, dass

$$\begin{aligned} \|u_N\|_{L_2((0,T),V)}^2 &= \int_0^T \|u_N\|_V^2 dt \leq C \left(\int_0^T \|u_N\|_{L_2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|f\|_{L_2(\Omega)}^2 dt \right) \\ &\stackrel{(4.80)}{\leq} \tilde{c}(\|u_0\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L_2((0,T),L_2(\Omega))}^2) \end{aligned} \quad (4.81)$$

d) Es ist

$$\left\| \frac{\partial u_N}{\partial t} \right\|_{L_2((0,T),V')} \leq c(\|f\|_{L_2((0,T),L_2(\Omega))} + \|u_0\|_{L_2(\Omega)}). \quad (4.82)$$

Wir betrachten ein $v \in V$ mit $\|v\|_V \leq 1$. Wir können v aufspalten als

$$v = v_1 + v_2 \quad v_1 \in V_N, (v_2, e_k)_{L_2(\Omega)} = 0 \text{ für } k = 1, 2, \dots$$

Es gilt

$$\|v_1\|_V \leq \|v\|_V \leq 1.$$

Setzen wir $v = v_1$ in (4.67), dann erhalten wir

$$\left(\frac{\partial u_N}{\partial t}, v_1 \right)_{L_2(\Omega)} + a(t, u_N, v_1) = \langle f, v_1 \rangle_{L_2(\Omega)}$$

und da $u_N \in V_N$ ist,

$$\left(\frac{\partial u_N}{\partial t}, v \right)_{L_2(\Omega)} = \left(\frac{\partial u_N}{\partial t}, v_1 \right)_{L_2(\Omega)} = \langle f, v_1 \rangle_{L_2(\Omega)} - a(t, u_N, v_1).$$

Da $\|v_1\| \leq 1$, ergibt sich

$$\left| \left(\frac{\partial u_N}{\partial t}, v \right)_{L_2(\Omega)} \right| \leq \|f\|_{L_2(\Omega)} + C_2 \|u_N\|_V.$$

Damit wird

$$\left\| \frac{du_N}{dt} \right\|_{V'} = \sup_{\|v\| \leq 1} \left| \left(\frac{\partial u_N}{\partial t}, v \right)_{L_2(\Omega)} \right| \leq C[\|f\|_{L_2(\Omega)} + C_2 \|u_N\|_V]$$

und es wird

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\| \frac{du_N}{dt} \right\|_{V'}^2 dt &\leq \tilde{c} \int_0^T (\|f\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|u_N\|_V^2) dt \\ &\stackrel{(4.81)}{\leq} C(\|f\|_{L_2((0,T),L_2(\Omega))}^2 + \|u_0\|_{L_2(\Omega)}^2). \end{aligned}$$

■

3. Schritt: Konvergenz einer Teilfolge zur schwachen Lösung

Die Abschätzung (4.69) besagt, dass die Folge $(u_N)_{N=1,2,\dots}$ in $L_2((0, T), V)$ und die Folge ihrer Ableitungen $(\frac{d}{dt}u_N)_{N=1,2,\dots}$ in $L_2((0, T), V')$ beschränkt sind.

Daher existiert eine Teilfolge $(u_{N_l})_{l=1,2,\dots}$ und eine Funktion $u \in L_2((0, T), V)$ mit $\frac{du}{dt} \in L_2((0, T), V')$ so, dass

$$\begin{aligned} u_{N_l} &\rightharpoonup u \quad \text{in } L_2((0, T), V), \\ \frac{du_{N_l}}{dt} &\rightharpoonup \frac{du}{dt} \quad \text{in } L_2((0, T), V'). \end{aligned} \quad (4.83)$$

d.h. für alle linearen stetigen Funktionale $F \in (L_2((0, T), V))'$ gilt $|F(u_{N_l}) - F(u)| \rightarrow 0$ und für alle $G \in (L_2((0, T), V'))'$ gilt $|G(\frac{\partial u_{N_l}}{\partial t}) - G(\frac{\partial u}{\partial t})| \rightarrow 0$. Es folgt

$$\int_0^T [\langle u'_{N_l}, \tilde{v} \rangle + a(t, u_{N_l}, \tilde{v})] dt \rightarrow \int_0^T [\langle u', \tilde{v} \rangle + a(t, u, \tilde{v})] dt \quad (4.84)$$

für $l \rightarrow \infty$ und für alle $\tilde{v} \in L_2((0, T), V)$.

Wählen wir für \tilde{v} die folgenden endlichen Linearkombinationen

$$\tilde{v}_m(t) = \sum_{k=1}^m v_k(t) e_k, \quad (4.85)$$

wobei $v_k(t)$ beliebige, glatte Funktionen sind, dann erhalten wir durch Multiplikation von (4.65) mit $v_k(t)$, anschließender Summation sowie Integration, dass

$$\int_0^T [\langle u'_{N_l}, \tilde{v}_m \rangle + a(t, u_{N_l}, \tilde{v}_m)] dt = \int_0^T \langle f, \tilde{v}_m \rangle dt \quad (4.86)$$

gilt.

Da die Menge der Funktionen (4.85) dicht in $L_2((0, T), V)$ ist, folgt aus der Relation (4.86)

$$\int_0^T [\langle u', \tilde{v} \rangle + a(t, u, \tilde{v})] dt = \int_0^T \langle f, \tilde{v} \rangle dt \quad \forall \tilde{v} \in L_2((0, T), V). \quad (4.87)$$

Inbesondere gilt (4.87) für alle \tilde{v} der Gestalt

$$\tilde{v} = h(t)v, \quad h \in L_2(0, T) \text{ oder glatter, } v \in V,$$

$$\int_0^T [\langle u', v \rangle + a(t, u, v)] h(t) dt = \int_0^T \langle f, v \rangle h(t) dt.$$

Aus dem Variationslemma (Lemma von Du Bois-Reymond) folgt

$$\langle u', v \rangle + a(t, u, v) = \langle f, v \rangle$$

für fast alle $t \in [0, T]$ und für alle $v \in V$. Damit ist u schwache Lösung von (4.62), (4.63).

4. Schritt: Annahme der Anfangsbedingung

Wir betrachten Elemente $\tilde{v}, \tilde{v}_m \in C^1([0, T], V)$ mit $\tilde{v}(T) = 0$ bzw. $\tilde{v}_m(T) = 0$ und integrieren die Relationen (4.86) und (4.87) partiell nach t .

Wir erhalten

$$\int_0^T [-\langle u_{N_l}, \tilde{v}'_m \rangle + a(t, u_{N_l}, \tilde{v}_m)] dt = \int_0^T \langle f, \tilde{v}_m \rangle dt + (u_{N_l}(0), \tilde{v}_m(0))_{L_2(\Omega)}, \quad (4.88)$$

$$\int_0^T [-\langle u, \tilde{v}' \rangle + a(t, u, \tilde{v})] dt = \int_0^T \langle f, \tilde{v} \rangle dt + (u(0), \tilde{v}(0))_{L_2(\Omega)}. \quad (4.89)$$

Die Relation (4.68) besagt, dass

$$(u_{N_l}(0), \tilde{v}_m(0)) = (u_0, \tilde{v}_m(0)) \quad \text{für } N_l \geq m \quad (4.90)$$

gilt.

Für ein $\tilde{v} \in C^1([0, T], V)$ betrachten wir nun eine approximierende Folge \tilde{v}_m . Unter Beachtung der schwachen Konvergenz (4.83) und der Relation (4.90) konvergiert (4.88) für $l, m \rightarrow \infty$ zum Grenzwert

$$\int_0^T [-\langle u, \tilde{v}' \rangle + a(t, u, \tilde{v})] dt = \int_0^T \langle f, \tilde{v} \rangle dt + \langle u_0, \tilde{v}(0) \rangle.$$

Die Gleichung (4.90) liefert, dass

$$\langle u(0), \tilde{v}(0) \rangle = (u(0), \tilde{v}(0))_{L_2(\Omega)} = (u_0, \tilde{v}(0))_{L_2(\Omega)} \quad \text{für alle } \tilde{v}(0) = v \in V$$

ist. Daraus folgt $u(x, 0) = u_0(x)$ f.ü. .

5. Schritt: Eindeutigkeit

Sei $u = u_1 - u_2$ die Differenz zweier Lösungen. Dann ist

$$\langle u', u \rangle = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right) = -a(t, u, u).$$

Aus den Voraussetzungen (Koerzitivität) folgt

$$a(t, u, u) \geq c_2 \|u\|_V^2 - c_3 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \geq -c_3 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$$

und daher

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right) \leq c_3 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (4.91)$$

Die Ungleichung (4.91) kann geschrieben werden als

$$\eta'(t) \leq 2c_3 \eta(t) = c\eta(t)$$

mit $\eta(t) = \|u(t)\|_{L_2(\Omega)}^2$.

Die Gronwallsche Ungleichung liefert

$$\eta(t) \leq e^{2c_3 t} \eta(0).$$

Wir haben $\eta(0) = 0$ und daher $0 \leq \eta(t) \leq 0$, woraus $\eta(t) \equiv 0$ für alle t folgt. Schließlich ist $u(t) = u_1(t) - u_2(t) = u_1(x, t) - u_2(x, t) = 0$ fast überall. ■

Wir betrachten jetzt eine beliebige Basis e_1, \dots, e_N in V_N , die nicht orthonormal in $L_2(\Omega)$ zu sein braucht.

Definition 28 $u_N : [0, T] \rightarrow V_N$ ist Galerkin Lösung des schwachen Problems (4.62),(4.63), falls u_N die folgende Form besitzt

$$u_N(x, t) = \sum_{k=1}^N a_{k,N}(t) e_k(x), \quad a_{k,N} \in H^1(0, T)$$

und Lösung des schwachen Problems

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} u_N, v_N \right) + a(u_N(t), v_N) = \langle f(t), v_N \rangle \quad \forall v_N \in V_N, (0 \leq t \leq T), \quad (4.92)$$

$$(u_N(x, 0), v_N) = (u_0, v_N) \quad \forall v_N \in V_N \quad (4.93)$$

ist.

Das Problem (4.92), (4.93) ist äquivalent zu einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung mit Anfangsbedingungen. Wählen wir $v_N = e_i, i = 1, \dots, N$, dann lautet (4.92), (4.93)

$$\left(\sum_{k=1}^N a'_{k,N}(t) e_k, e_i \right)_{L_2(\Omega)} + a \left(\sum_{k=1}^N a_{k,N}(t) e_k, e_i \right) = \langle f, e_i \rangle, \quad (4.94)$$

$$\left(\sum_{k=1}^N a_{k,N}(0) e_k, e_i \right)_{L_2(\Omega)} = (u_0, e_i)_{L_2(\Omega)}. \quad (4.95)$$

In Matrix-Vektor-Form wird aus (4.94), (4.95)

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & \cdots & (e_N, e_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ (e_1, e_N) & \cdots & (e_N, e_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{1,N}(t) \\ a'_{2,N}(t) \\ \vdots \\ a'_{N,N}(t) \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} a(e_1, e_1) & \cdots & a(e_N, e_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a(e_1, e_N) & \cdots & a(e_N, e_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) \\ a_{2,2}(t) \\ \vdots \\ a_{N,N}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f, e_1 \rangle \\ \langle f, e_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, e_N \rangle \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} (e_1, e_1) & \cdots & (e_N, e_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ (e_1, e_N) & \cdots & (e_N, e_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1}(0) \\ a_{2,2}(0) \\ \cdots \\ a_{N,N}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u_0, e_1) \\ (u_0, e_2) \\ \vdots \\ (u_0, e_N) \end{pmatrix}.$$

Kurz geschrieben lautet dieses System zur Bestimmung der Koeffizienten $a_i(t)$:

$$\begin{aligned} M \frac{d}{dt} \vec{a}_N(t) + A \vec{a}_N(t) &= \vec{f}(t), \\ M \vec{a}_N(0) &= \vec{u}_0. \end{aligned} \quad (4.96)$$

M heißt Massenmatrix, A Steifigkeitsmatrix. Die symmetrische Matrix M ist regulär, da die Basiselemente e_i linear unabhängig sind.

Wellengleichung

Wir betrachten das folgende Rand-Anfangswertproblem für die Wellengleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - a^2 \Delta u(x, t) &= f(x, t) \quad \text{in } Q_T, \\ u(x, t) &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times [0, T], \\ u(x, 0) &= u_0(x) \quad \text{auf } \Omega, \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= u_1(x) \quad \text{auf } \Omega. \end{aligned} \tag{4.97}$$

Das Vorgehen ist ähnlich wie im Fall der Wärmeleitungsgleichung und wir formulieren nur das Hauptergebnis [11, S. 385 ff], [4, S. 377ff]. Dazu definieren wir zunächst, was wir unter einer schwachen Lösung verstehen.

Definition 29 Eine Funktion $u \in L_2((0, T), V) \cap H^1((0, T), L_2(\Omega)) \cap H^2((0, T), V')$ (bzw. $u \in L_2((0, T), V)$ mit $\frac{\partial u}{\partial t} \in L_2((0, T), L_2(\Omega))$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in (L_2(0, T), V')$) ist schwache Lösung von (4.97), falls für alle $t \in (0, T]$ und für alle $v \in V$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, v \right\rangle + a(t, u, v) &= (f(\cdot, t), v), \\ (u(\cdot, 0), v) &= (u_0, v), \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, 0), v \right) &= (u_1, v) \end{aligned}$$

ist. Hierbei ist $f \in L_2((0, T), L_2(\Omega))$, $u_0 \in V$, $u_1 \in L_2(\Omega)$.

Satz 16 [21, S. 422, Satz 29.1], [11, Theorem 10.8, S. 385], [4, S. 384]

Für die parameterabhängige Bilinearform gelte: $\forall t \in [0, T], \forall u, v \in V$

- (i) $|a(t, u, v)| \leq C_1 \|u\|_V \|v\|_V$,
- (ii) $a(t, u, v) \in C^1[0, T]$ mit $\left| \frac{d}{dt} a(t, u, v) \right| \leq C \|u\|_V \|v\|_V$,
- (iii) $a(t, u, u) \geq C_2 \|u\|_V^2 - C_3 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$.

Dann hat das schwache Problem genau eine Lösung.

Für die Bilinearform in unserem Beispiel ist $a(t, u, v) = a^2 \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx$ und die obigen Voraussetzungen sind erfüllt.

Für $a(t, u, v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ji}(\cdot, t) u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(\cdot, t) u_{x_i} v + c(\cdot, t) uv \right) dx$ wird z.B. gefordert, dass die Koeffizienten a_{ji}, b_i, c aus $C^1(\overline{Q}_T)$ sind, $Q_T = (0, T) \times \Omega$.

Kapitel 5

Variationsmethoden für nichtlineare Probleme

In diesem Kapitel geben wir eine Einführung in Variationsmethoden, die zu Lösungen linearer und nichtlinearer partieller Differentialgleichungen führen. Hierbei stützen wir uns auf die Ausführungen in [4]. Die grundlegende Idee ist folgende:

Sei ein Differentialoperator A gegeben. Wir betrachten das nichtlineare bzw. lineare Randwertproblem

$$\begin{aligned} A[u] &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Wir führen ein „Energiefunktional“ $I = I[u]$ ein, so dass

$$A[\cdot] = I'[\cdot]$$

ist. Dann sind kritische Punkte von I , für die

$$\begin{aligned} I'[u] &= 0 \\ \text{und} \quad u &= g \end{aligned}$$

gilt, Lösungen unseres Ausgangsproblems (5.1).

Falls die Lösung von (5.1) schwierig ist, kann die Bestimmung eines Extremwertes von $I[u]$ einfacher sein. Hinzu kommt, dass einige physikalische Gesetze so formuliert werden, dass ein Minimum eines Funktionals gesucht wird.

5.1 Euler-Lagrange Gleichungen

Skalare Gleichungen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offene Teilmenge mit glattem Rand $\partial\Omega$. Wir betrachten zunächst glatte Funktionen $w \in C^2(\overline{\Omega})$

$$w : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R},$$

die auf $\partial\Omega$ einer Dirichletbedingung genügen:

$$w = g \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Kurz: $\mathcal{M} = \{u \in C^2(\bar{\Omega}) : w = g \text{ auf } \partial\Omega\}$ sei zunächst die zulässige Funktionenmenge. $I[\cdot]$ besitze die Form

$$I[w] = \int_{\Omega} L(Dw(x), w(x), x) \, dx,$$

wobei L die Lagrangesche Dichtefunktion ist. Hierbei ist $Dw = \nabla w = (\partial_1 w, \dots, \partial_n w)^\top$.

Bezeichnungen

Wir schreiben $L = L(\vec{p}, z, x)$, wobei $Dw = \nabla w =: \vec{p} \in \mathbb{R}^n$, $w =: z \in \mathbb{R}$ sind. Weiterhin sei

$$\begin{aligned} D_{\vec{p}}L &= (L_{p_1}, \dots, L_{p_n})^\top, \\ D_z L &= L_z, \\ D_x L &= (L_{x_1}, \dots, L_{x_n})^\top. \end{aligned}$$

Wir definieren jetzt, wann das Funktional I auf einer Teilmenge X eines Funktionenraums (setze z.B. $\mathcal{M} = X \subset C^2(\bar{\Omega})$) ein Minimum besitzt.

Definition 30 Sei $I : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Ein Punkt $u \in X$ heißt

a) lokales Minimum von I , falls ein $\varepsilon > 0$ existiert mit

$$I[w] \geq I[u] \quad \forall w \in X \text{ mit } \|w - u\|_X \leq \varepsilon.$$

b) globales Minimum von I , falls $I[w] \geq I[u] \quad \forall w \in X$.

Beispiel

Sei $X = \{w \in C^1([0, 1]), w(0) = 0, w(1) = a\}$ und $I(w) = \int_0^1 (1 - w'^2)^2 \, dx$. Für $a = 1$ wird das Minimum in $u(x) = x$ angenommen. u ist ein globales Minimum. Für $a < 1$ existiert kein Minimierer in X . Sei $x_a = \frac{a+1}{2}$.

$$u_n = \begin{cases} x & \text{in } [0, x_a - \frac{1}{n}] \\ -x + 1 + a & \text{in } [x_a + \frac{1}{n}, 1] \\ \text{stetig differenzierbar ergänzt} & \text{in } (x_a - \frac{1}{n}, x_a + \frac{1}{n}). \end{cases}$$

Es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(u_n) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u^* \notin X.$$

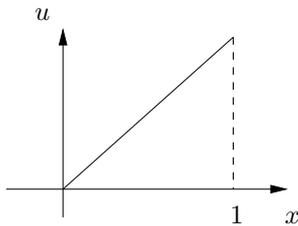


Abbildung 5.1: Die Funktion $u(x) = x$

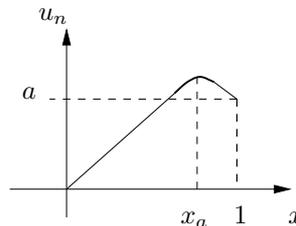


Abbildung 5.2: Die Funktion u_n

Satz 17 Besitzt I einen Minimierer in \mathcal{M} , dann ist dieser eine Lösung einer quasilinearen partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung in Divergenzform, der sogenannten Euler-Lagrange Gleichung

$$-\operatorname{div} L_{\vec{p}}(Du, u, x) + L_z(Du, u, x) = 0.$$

Beweis

Wir betrachten Funktionen $v \in C_0^\infty(\Omega)$ und führen die Funktion $i = i(\tau), i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ein:

$$i(\tau) := I[u + \tau v],$$

wobei u ein Minimierer von $I[\cdot]$ ist. Es folgt sofort, dass $\tau = 0$ ein Minimum von i realisiert. Dabei gilt die notwendige Bedingung $i'(0) = 0$. Wir berechnen $i'(\tau)$ (auch erste Variation, bzw. Richtungsableitung, genannt) von

$$i(\tau) = \int_{\Omega} L(Du + \tau Dv, u + \tau v, x) \, dx.$$

Durch Anwenden der Kettenregel erhalten wir

$$i'(\tau) = \int_{\Omega} L_{\vec{p}}(Du + \tau Dv, u + \tau v, x) \cdot Dv \, dx + \int_{\Omega} L_z(Du + \tau Dv, u + \tau v, x) v \, dx,$$

woraus

$$i'(0) = \int_{\Omega} L_{\vec{p}}(Du, u, x) \cdot Dv \, dx + \int_{\Omega} L_z(Du, u, x) v \, dx = 0 \quad (5.2)$$

folgt. Durch partielle Integration des ersten Integrals erhalten wir

$$\int_{\Omega} [-\operatorname{div} L_{\vec{p}}(Du, u, x) + L_z(Du, u, x)] v \, dx = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Das Fundamentallema der Variationsrechnung (Seite 74) liefert uns die Euler-Lagrange Gleichung

$$-\operatorname{div} L_{\vec{p}}(Du, u, x) + L_z(Du, u, x) = 0. \quad (5.3)$$

■

Bemerkung

Die Biform (5.2)

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (L_{\vec{p}}(Du, u, x) \cdot Dv + L_z(Du, u, x) v) \, dx$$

entspricht der schwachen Formulierung linearer Randwertprobleme. Die Differentialgleichung (5.3) stellt die starke Formulierung als partielle Differentialgleichung dar.

Beispiele

1° Sei $L(Du, u, x) = L(\vec{p}, z, x) = \frac{1}{2} |\vec{p}|^2$. Dann ist $L_{\vec{p}} = \vec{p}$ und $L_z = 0$. Daher lautet die Euler-Lagrange Gleichung zum Funktional $I[w] := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |Dw|^2 \, dx$

$$-\operatorname{div} \vec{p} = -\operatorname{div}(Du) = -\Delta u = 0.$$

- 2° Sei $L(\vec{p}, z, x) = \frac{1}{2} A\vec{p} \cdot \vec{p} - zf(x)$, wobei A eine Matrix aus $\mathbb{R}^{n \times n}$ ist. Dann ist $L_{\vec{p}} = A\vec{p}$, $L_z = -f(x)$. Das Funktional

$$I[w] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (ADw \cdot Dw - wf(x)) \, dx$$

besitzt die Euler-Lagrange Gleichung

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) = f.$$

- 3° Sei $F(z) = \int_0^z f(y) \, dy$ genügend glatt. Wir betrachten das Funktional

$$I[w] = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |Dw|^2 - F(w) \right) \, dx.$$

Die Lagrange-Funktion lautet

$$L(\vec{p}, z, x) = \frac{1}{2} |\vec{p}|^2 - F(z).$$

Daraus folgt die Euler-Lagrange Gleichung

$$-\Delta u = f(u),$$

die auch nichtlineare Poisson-Gleichung genannt wird.

- 4° Gegeben sei

$$L(\vec{p}, z, x) = (1 + |\vec{p}|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Das zugehörige Funktional lautet

$$I[w] = \int_{\Omega} (1 + |Dw|^2)^{\frac{1}{2}} \, dx.$$

Die assoziierte Euler-Lagrange Gleichung ist

$$-\operatorname{div}(L_{\vec{p}}(Du)) = -\operatorname{div}\left(\frac{\vec{p}}{(1 + |\vec{p}|^2)^{\frac{1}{2}}}\right) = -\operatorname{div}\frac{Du}{1 + |Du|^2} = 0.$$

Diese Differentialgleichung beschreibt die Minimierung einer Oberfläche.

- 5° Wir betrachten die q -Laplace Gleichung. Dazu führen wir das Funktional

$$I[w] = \int_{\Omega} \frac{1}{q} |Dw|^q \, dx$$

ein. Es ist

$$L_{\vec{p}}(\vec{p}, z, x) = \frac{1}{q} |\vec{p}|^q$$

und

$$-\operatorname{div}L_{\vec{p}}(Du) = -\operatorname{div}(|Du|^{q-2} Du) = 0.$$

Diese Euler-Lagrange Gleichung wird q -Laplace Gleichung genannt. Für $q = 2$ erhalten wir die Laplace-Gleichung.

Systeme

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offene Teilmenge mit glattem Rand $\partial\Omega$ und $\vec{w} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\vec{w}(x) = \vec{w}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (w_1(x), \dots, w_m(x))^\top$. Weiterhin sei $\mathbb{R}^{m \times n}$ der Raum aller $(m \times n)$ -Matrizen mit reellen Einträgen.

Wir betrachten zunächst die Menge

$$\mathcal{M} = \{ \vec{w} \in [C^2(\overline{\Omega})]^m : \vec{w} = \vec{g} \text{ auf } \partial\Omega \}.$$

Das Funktional I auf \mathcal{M} besitze die Form

$$I[\vec{w}] = \int_{\Omega} L(D\vec{w}(x), \vec{w}(x), x) dx, \quad (5.4)$$

wobei $D\vec{w}$ die Fréchetableitung (Jacobi-Matrix) des Vektorfeldes \vec{w} ist:

$$D\vec{w} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial w_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial w_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial w_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung $L : \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^m \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt auch in diesem Fall Lagrange-Funktion. Um die Variablen von L zu kennzeichnen, führen wir die Schreibweise $L = L(P, \vec{z}, x)$ ein, wobei $D\vec{w} = P = (p_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq n}}$, $\vec{w} = \vec{z}$ sind.

Weiterhin sei

$$D_P L = \begin{pmatrix} L_{p_{11}} & \cdots & L_{p_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{p_{m1}} & \cdots & L_{p_{mn}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial p_{11}} & \cdots & \frac{\partial L}{\partial p_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial p_{m1}} & \cdots & \frac{\partial L}{\partial p_{mn}} \end{pmatrix}$$

und

$$D_{\vec{z}} L = \begin{pmatrix} L_{z_1} \\ \vdots \\ L_{z_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial z_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial z_m} \end{pmatrix}.$$

Auch hier gilt ein zu Satz 17 analoger, der das Funktional I mit einem System partieller Differentialgleichungen verbindet.

Satz 18 *Besitzt das Funktional (5.4) einen Minimierer \vec{u} in \mathcal{M} , dann ist \vec{u} Lösung eines nichtlinearen Systems von partiellen Differentialgleichungen (System der Euler-Lagrange Gleichungen)*

$$-\operatorname{div} D_P L(D\vec{u}, \vec{u}, x) + D_{\vec{z}} L(D\vec{u}, \vec{u}, x) = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Hierbei ist

$$\operatorname{div} D_P L = \begin{pmatrix} \partial_1 L_{p_{11}} + \partial_2 L_{p_{12}} + \cdots + \partial_n L_{p_{1n}} \\ \cdots \\ \partial_1 L_{p_{m1}} + \partial_2 L_{p_{m2}} + \cdots + \partial_n L_{p_{mn}} \end{pmatrix}$$

ein Vektor aus \mathbb{R}^m .

Beweis

Wir betrachten ein $\vec{v} \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ und führen die reelle Funktion i einer reellen Variablen τ ein

$$i(\tau) := I[\vec{u} + \tau\vec{v}].$$

Die Elemente $\vec{u} + \tau\vec{v}$ sind aus \mathcal{M} und $i(\tau)$ ist wohl definiert. Da \vec{u} Minimierer ist, muss $i'(0) = 0$ sein.

Nach der Kettenregel ist

$$i'(\tau) = \int_{\Omega} L_P(D\vec{u} + \tau D\vec{v}, \vec{u} + \tau\vec{v}, x) : D\vec{v} \, dx + \int_{\Omega} L_{\vec{z}}(D\vec{u} + \tau D\vec{v}, \vec{u} + \tau\vec{v}, x) \cdot \vec{v} \, dx,$$

wobei $A : B = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ik}$ ist. Daraus folgt

$$\begin{aligned} i'(0) &= \int_{\Omega} L_P(D\vec{u}, \vec{u}, x) : D\vec{v} \, dx + \int_{\Omega} L_{\vec{z}}(D\vec{u}, \vec{u}, x) \cdot \vec{v} \, dx \\ &\stackrel{\text{part. Int}}{=} - \int_{\Omega} \operatorname{div} L_P(D\vec{u}, \vec{u}, x) \cdot \vec{v} \, dx + \int_{\Omega} L_{\vec{z}}(D\vec{u}, \vec{u}, x) \cdot \vec{v} \, dx = 0. \end{aligned}$$

■

Beispiel

6° Wir betrachten das Funktional

$$I[\vec{w}] = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma(\vec{w}) : \varepsilon(\vec{w}) \, dx,$$

wobei

$$\varepsilon(\vec{w}) = \frac{1}{2} (\nabla \vec{w} + (\nabla \vec{w})^\top) = \frac{1}{2} (D\vec{w} + (D\vec{w})^\top)$$

der linearisierte Verzerrungstensor und

$$\sigma(\vec{w}) = \lambda \operatorname{tr} \varepsilon(\vec{w}) I + 2\mu \varepsilon(\vec{w})$$

der linearisierte Spannungstensor für ein isotropes Material ist. λ und μ sind Materialparameter. Dann lautet die Lagrange-Funktion

$$L(P) = \frac{1}{2} \lambda (\operatorname{tr} P)^2 + \frac{1}{4} \mu (P + P^\top) : (P + P^\top).$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} L_P(P) &= \lambda \operatorname{tr} P I + 2\mu \left(\frac{P + P^\top}{2} \right), \\ L_P(D\vec{w}) &= \lambda \operatorname{tr} D\vec{w} I + 2\mu \varepsilon = \sigma \end{aligned}$$

und schließlich das Euler-Lagrange System der linearisierten Elastizität

$$-\operatorname{div} \sigma = \vec{0}.$$

5.2 Existenz von Minimierern

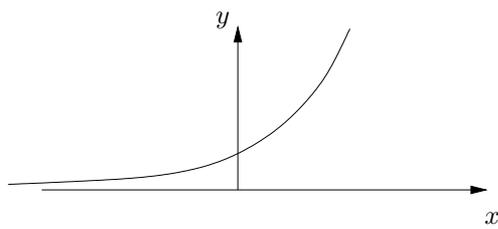
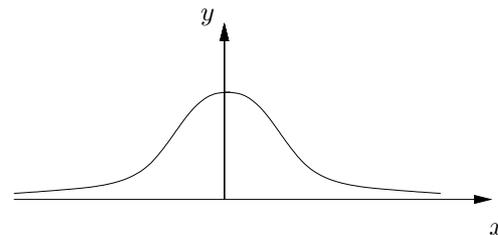
Wir wollen untersuchen unter welchen Voraussetzungen an die Lagrangefunktion L das Funktional $I[\cdot]$ ein Minimum in einer Teilmenge X eines Sobolevraumes besitzt. Sobolevräume sind umfassender als Räume stetig differenzierbarer Funktionen und daher gibt es mehr Kandidaten für Minimierer. Charakteristisch ist, dass nichtlineare Probleme in Sobolevräumen $W^{1,q}(\Omega)$, $1 < q < \infty$, betrachtet werden, wobei die Wahl des Exponenten q von einem gewissen Wachstum der Lagrangefunktion L abhängt. Aus diesem Wachstum folgt eine Koerzitivitätsbedingung für das Funktional $I[\cdot]$.

Koerzitivität

Wir erinnern daran, dass glatte Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die von unten beschränkt sind, ihr Infimum nicht immer annehmen. Betrachten wir zum Beispiel $f(x) = e^x$ oder $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Es ist

$$0 \leq \inf_{x \in \mathbb{R}} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \text{ siehe Abbildung 5.3}$$

$$0 \leq \inf_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0, \text{ siehe Abbildung 5.4.}$$

Abbildung 5.3: Die Funktion $f(x) = e^x$ Abbildung 5.4: Die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Stellen wir jedoch eine Bedingung, wie schnell f wächst für $|x| \rightarrow \infty$, z.B. $f(x) \geq c_1|x|^q - c_2$, dann wird das Infimum durch einen endlichen Wert realisiert. Dieses Herangehen wird auf die Lagrange-Funktionen übertragen.

Definition 31 (Skalarer Fall) Sei $q \in \mathbb{R}$, $1 < q < \infty$. Die Lagrange-Funktion $L = L(\vec{p}, z, x)$ genügt einer Koerzitivitätsbedingung, falls Konstanten $\hat{\alpha} > 0$, $\hat{\beta} \geq 0$ existieren, so dass

$$L(\vec{p}, z, x) \geq \hat{\alpha}|\vec{p}|^q - \hat{\beta} \quad \forall \vec{p} \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}, x \in \Omega \quad (5.5)$$

gilt. Die daraus resultierende Ungleichung

$$I[w] = \int_{\Omega} L(Dw, z, x) dx \geq \alpha \|Dw\|_{L_q(\Omega)}^q - \beta \quad (5.6)$$

mit

$$\|Dw\|_{L_q(\Omega)}^q = \sum_{i=1}^n \|\partial_i w\|_{L_q(\Omega)}^q$$

heißt Koerzitivitätsbedingung für das zugehörige Funktional $I[\cdot]$.

Bemerkung:

(5.6) folgt aus (5.5), da

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n p_i^2\right)^{\frac{q}{2}} &\geq \sum_{i=1}^n |p_i^2|^{\frac{q}{2}} && \text{für } q \geq 2 \\ \text{und } \left(\sum_{i=1}^n p_i^2\right)^{\frac{q}{2}} &\geq n^{\frac{q}{2}-1} \sum_{i=1}^n |p_i|^q && \text{für } 1 \leq q < 2. \end{aligned}$$

Definition 32 (Systeme) Sei $q \in \mathbb{R}, 1 \leq q < \infty$. Die Lagrange-Funktion $L = L(P, \vec{z}, x)$ genügt einer Koerzitivitätsbedingung, falls Konstanten $\hat{\alpha} > 0, \hat{\beta} \geq 0$ existieren, so dass

$$L(P, \vec{z}, x) \geq \hat{\alpha}|P|^q - \hat{\beta} \quad \forall P \in \mathbb{R}^{m \times n}, \vec{z} \in \mathbb{R}^m, x \in \Omega \quad (5.7)$$

gilt. Hierbei ist $|P| := (P : P)^{\frac{1}{2}}$. Die daraus resultierende Ungleichung

$$I[\vec{w}] = \int_{\Omega} L(D\vec{w}, \vec{w}, x) \, dx \geq \alpha \|D\vec{w}\|_{L_q(\Omega)}^q - \beta \quad (5.8)$$

mit

$$\|D\vec{w}\|_{L_q(\Omega)}^q = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|\partial_j w_i\|_{L_q(\Omega)}^q,$$

heißt Koerzitivitätsbedingung für $I[\cdot]$.

Bemerkung:

Im skalaren Fall (5.6) und für Systeme (5.8) gilt: $I[w] \rightarrow \infty$ für $\|Dw\|_{L_q(\Omega)} \rightarrow \infty$.

Beispiele

Wir sehen uns die skalaren Beispiele aus Abschnitt 5.1 an und überprüfen, ob die Ungleichung (5.5) erfüllt ist.

- 1° Die Lagrangefunktion $L(\vec{p}, z, x) = \frac{1}{2}|\vec{p}|^2$ genügt (5.5) für $q = 2$ (linearer Fall!).
- 2° Falls $L(\vec{p}, z, x) = \frac{1}{2}A\vec{p} \cdot \vec{p} \geq \hat{\alpha}|\vec{p}|^2$ ist, d.h. $f(x) = 0$ und A positiv definit ist, dann gilt (5.5) für $q = 2$.
- 3° In diesem Fall ist $L(\vec{p}, z, x) = \frac{1}{2}|\vec{p}|^2 - F(z)$ und (5.5) gilt, falls $F(z) \leq \hat{\beta}$ für alle $z \in \mathbb{R}$.
- 4° Für $L(\vec{p}, z, x) = (1 + |\vec{p}|^2)^{\frac{1}{2}} \geq |\vec{p}|$ ist $q = 1$ wählbar. Wir werden später sehen, dass $q > 1$ sein muss, damit ein reflexiver Banachraum vorliegt. Dieses Beispiel passt deshalb nicht in unsere Theorie.
- 5° Für den q -Laplace-Operator erhalten wir unmittelbar die Ungleichung (5.5).

Zulässige Funktionenmenge

Die Ungleichungen (5.6) und (5.8) legen es nahe, Minimierer in $W^{1,q}(\Omega)$ zu suchen. Deshalb führen wir die Menge der zulässigen Funktionen wie folgt ein:

$$X := \{w \in W^{1,q}(\Omega) : w = g \in W^{1-\frac{1}{q},q}(\partial\Omega)\}.$$

Neben der Koerzitivität betrachten wir nun die Konvexität der Lagrangefunktion, bzw. des Funktionals I .

Konvexität

Bisher haben wir die notwendige Bedingung $i'(0) = 0$ betrachtet, die erfüllt sein muss, falls u ein Minimierer von $I[\cdot]$ ist und die Lagrange-Funktion differenzierbar ist.

Wir erinnern jetzt daran, dass $i = i(\tau)$ in $\tau = 0$ ein Minimum besitzt, falls $i''(0) > 0$ ist, d.h. i ist in einer Umgebung von 0 konvex. Dies folgt sofort aus der Taylor-Entwicklung

$$i(\tau) - i(0) = \frac{\tau^2}{2} i''(0) + \frac{\tau^3}{3} i'''(0) + \dots$$

Für reelle Funktionen von mehreren Variablen lautet die hinreichende Bedingung für ein lokales Minimum in x_0 :

Sei $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in einer Umgebung von $x_0 \in \Omega$ zweimal stetig differenzierbar und $\nabla f(x_0) = 0$. Falls die quadratische Form

$$Q(h_1, \dots, h_n) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(x_0) h_i h_k = \vec{h}^\top H \vec{h}$$

positiv definit ist (d.h. $Q(\vec{h}) > 0$ für $\vec{h} \neq \vec{0}$), dann liegt in x_0 ein lokales Minimum vor. Hierbei ist

$$H = H(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

die Hesse-Matrix im Punkt x_0 .

Diese Überlegungen führen uns auf die Betrachtung der „zweiten Variation“ des Funktionals $I[\cdot]$

$$i''(\tau) = \frac{d^2}{d\tau^2} \int_{\Omega} L(Du + \tau Dv, u + \tau v, x) dx.$$

Hierbei ist wieder $v \in C_0^\infty(\Omega)$ eine feste, aber beliebige Funktion.

Es gilt

$$\begin{aligned} i''(\tau) &= \frac{d}{d\tau} i'(\tau) = \frac{d}{d\tau} \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L(Du + \tau Dv, u + \tau v, x)}{\partial p_i} \partial_i v \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial L}{\partial z}(Du + \tau Dv, u + \tau v, x) \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L(Du + \tau Dv, u + \tau v, x)}{\partial p_i \partial p_j} \partial_i v \partial_j v \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 L(Du + \tau Dv, u + \tau v, x)}{\partial p_i \partial z} \partial_i v v \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 L(Du + \tau Dv, u + \tau v, x)}{\partial z^2} v^2 \right) dx. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
 i''(0) &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial p_i \partial p_j} (Du, u, x) \partial_i v \partial_j v \\
 &\quad + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial p_i \partial z} (Du, u, x) \partial_i v v \\
 &\quad + \frac{\partial^2 L(Du, u, x)}{\partial z^2} v^2 dx \quad \text{für alle } v \in C_0^\infty(\Omega). \tag{5.9}
 \end{aligned}$$

Wir überlegen nun: falls $i''(0) \geq 0$ für alle $v \in C_0^\infty(\Omega)$ ist, dann gilt für die quadratische Form

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial p_i \partial p_j} (Du, u, x) \xi_i \xi_j \geq 0 \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n, x \in \Omega,$$

d.h. L ist konvex bezüglich des ersten Arguments \vec{p} für alle $x \in \Omega$.

Wir setzen in (5.9) anstelle von $v \in C_0^\infty(\Omega)$ Funktionen aus $H^1(\Omega)$ ein

$$\begin{aligned}
 v(x) &= \varepsilon \rho \left(\frac{x - \xi}{\varepsilon} \right) \tilde{v}(x), \quad \tilde{v} \in C_0^\infty(\Omega), \xi \in \mathbb{R}^n \text{ fest,} \\
 \rho(t) &= \begin{cases} t & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1 - t & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} \\
 \rho(t+1) &= \rho(t) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, \text{ (siehe Abbildung 5.5).}
 \end{aligned}$$

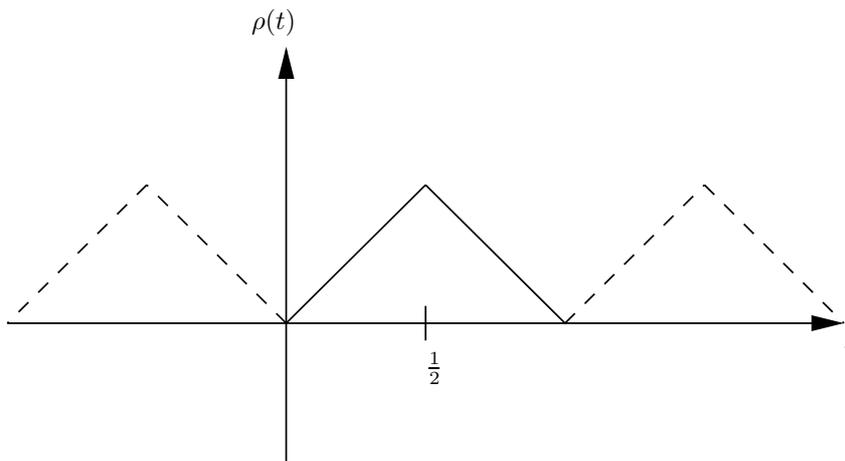


Abbildung 5.5: Die Funktion $\rho = \rho(t)$

ρ ist schwach differenzierbar und für $t = \frac{x-\xi}{\varepsilon}$ gilt

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v}{\partial x_i} &= \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x_i} \tilde{v}(x) + \varepsilon \rho \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i} \\
 &= \frac{d\rho}{dt} \xi_i \tilde{v}(x) + \varepsilon \rho \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i}.
 \end{aligned}$$

Damit wird

$$0 \leq i''(0) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n L_{p_i p_j} (Du, u, x) \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)^2 \xi_i \xi_j \tilde{v}^2 dx + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Da $|\frac{d\rho}{dt}| = 1$ f.ü. folgt für $\varepsilon \rightarrow 0$

$$0 \leq \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n L_{p_i p_j}(Du, u, x) \xi_i \xi_j \tilde{v}^2 dx \quad \forall \tilde{v} \in C_0^\infty(\Omega).$$

Damit haben wir erhalten: ist u ein genügend glatter Minimierer und $i''(0) > 0$, dann gilt

$$\sum_{i,j=1}^n L_{p_i p_j}(Du, u, x) \xi_i \xi_j \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, x \in \Omega. \quad (5.10)$$

Um Ableitungseigenschaften von L zu umgehen, definiert man:

Definition 33 L ist konvex bezüglich des ersten Arguments \vec{p} , falls

$$L(\tau \vec{p} + (1 - \tau) \vec{q}, z, x) \leq \tau L(\vec{p}, z, x) + (1 - \tau) L(\vec{q}, z, x) \quad (5.11)$$

für alle $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}, x \in \Omega, 0 < \tau < 1$.

L ist strikt konvex bezüglich des ersten Arguments \vec{p} , falls

$$L(\tau \vec{p} + (1 - \tau) \vec{q}, z, x) < \tau L(\vec{p}, z, x) + (1 - \tau) L(\vec{q}, z, x) \quad (5.12)$$

für alle $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}^n, \vec{p} \neq \vec{q}, z \in \mathbb{R}, x \in \Omega, 0 \leq \tau \leq 1$.

Wir sehen uns den Zusammenhang zwischen (5.10) und (5.11) an.

Lemma 12 (Konvexität und Ableitungen)

a) Sei $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. L ist konvex, genau dann wenn

$$L(\vec{p}) \geq L(\vec{q}) + D_p L(\vec{q}) \cdot (\vec{p} - \vec{q}) \quad \forall \vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}^n. \quad (5.13)$$

b) Sei $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. L ist konvex, genau dann wenn

$$\sum_{i,j=1}^n L_{p_i p_j}(\vec{q})(p_i - q_i)(p_j - q_j) \geq 0 \quad \forall \vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis

a) Sei $g(\tau) = L(\tau \vec{p} + (1 - \tau) \vec{q})$. Dann lautet die Konvexitätsungleichung

$$\begin{aligned} g(\tau) &\leq \tau g(1) + (1 - \tau) g(0) \\ \Leftrightarrow \tau g(1) &\geq g(\tau) - g(0) + \tau g(0) \\ \Leftrightarrow g(1) &\geq g(0) + \frac{g(\tau) - g(0)}{\tau}. \end{aligned}$$

Falls L differenzierbar ist, so folgt $g'(0) = \nabla L \cdot (\vec{p} - \vec{q})$.

b) siehe [13] oder [12].

■

Weiterhin gilt für konvexe Funktionen folgende Abschätzung.

Lemma 13 [4, S.621] Sei $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konvex. Dann existiert für jedes $\vec{q} \in \mathbb{R}^n$ ein $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$, so dass für alle $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$

$$L(\vec{p}) \geq L(\vec{q}) + \vec{r} \cdot (\vec{p} - \vec{q}) \quad (5.14)$$

ist.

Beispiele

1° Für $L(\vec{p}, z, x) = \frac{1}{2}|\vec{p}|^2$ gilt, dass die Hessematrix mit der Einheitsmatrix übereinstimmt. Daher ist L bezüglich \vec{p} konvex.

2° Es ist $L = \frac{1}{2}A\vec{p} \cdot \vec{p}$, $\frac{\partial L}{\partial p_i} = (A\vec{p})_i$ und $\frac{\partial^2 L}{\partial p_i \partial p_j} = a_{ij}$. In diesem Fall ist L konvex bezüglich des ersten Arguments, falls die Zahlenmatrix A positiv definit ist.

3° Da $L = L(\vec{p}, z, x) = \frac{1}{2}|\vec{p}|^2 - F(z)$ ist, folgt wie im Beispiel 1° die Konvexität.

Die Überprüfung der Konvexität der Lagrangefunktionen zu den Beispielen 4° und 5° auf Seite 114 wird als Übung empfohlen.

Wir wollen nun zeigen, dass aus der Koerzitivität und Konvexität von L die Existenz eines Minimierers von $I[\cdot]$ in der zulässigen Menge X folgt. Dabei ist es notwendig, den Begriff einer minimierenden (infinierenden) Folge zu diskutieren und eine „gewisse Stetigkeit“ des Funktionals zu garantieren.

Schwache Unterhalbstetigkeit

Es sei

$$\inf_{w \in X} I[w] = m, \quad X = \{w \in W^{1,q}(\Omega), w = g \text{ auf } \partial\Omega\}. \quad (5.15)$$

Dann existiert eine Folge von Funktionen $u_k \in X$, so dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I[u_k] = m. \quad (5.16)$$

Eine solche Folge wird minimierende bzw. infinierende Folge genannt.

Es treten die Fragen auf

- 1) Konvergiert u_k zu einem Element $u \in X$?
- 2) Wenn ja, ist $\inf_{w \in X} I[w] = I[u] = m$?

Sehen wir uns die Koerzitivitätsungleichung (5.6) an. Es ist

$$\alpha \|Dw\|_{L_q(\Omega)}^q \leq I[w] + \beta \quad \forall w \in X, \quad (5.17)$$

d.h. die Elemente u_k der minimierenden Folge besitzen beschränkte Ableitungen in $L_q(\Omega)$. Außerdem können wir garantieren, dass

$$\|u_k\|_{L_q(\Omega)} \leq \hat{c}. \quad (5.18)$$

Das kann man wie folgt sehen: Sei $w \in X$ beliebig. Dann ist $u_k - w \in \overset{\circ}{W}^{k,p}(\Omega)$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \|u_k\|_{L_q(\Omega)} &= \|u_k - w + w\|_{L_q(\Omega)} \leq \|u_k - w\|_{L_q(\Omega)} + \|w\|_{L_q(\Omega)} \\ &\stackrel{\text{Poincaré-Fr.}}{\leq} c\|Du_k - Dw\| + c \stackrel{(5.17)}{\leq} \hat{c}. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Daher ist die minimierende Folge (u_k) in $W^{1,q}(\Omega)$ beschränkt. Für $q > 1$ ist $W^{1,q}(\Omega)$ ein reflexiver Banachraum, d.h.: es gibt eine schwach konvergente Teilfolge $\{u_{k_j}\}$ von $\{u_k\}$ mit

$$u_{k_j} \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,q}(\Omega). \tag{5.20}$$

Wir bemerken jedoch, dass wir nicht beweisen können:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} I[u_k] = m \\ u_{k_j} \rightharpoonup u \end{aligned} \right\} \Rightarrow I[u] = m.$$

Beispiel

Es sei

$$I(u) = \int_0^1 \left(\frac{1}{4}(1 - (u')^2)^2 + \frac{1}{2}u^2 \right) dx,$$

wobei $u \in X = \overset{\circ}{W}^{1,4}((0, 1))$ ist.

1° Es ist $\inf_{u \in X} I[u] = 0$. Um dies zu sehen, konstruieren wir eine minimierende (besser infimierende Folge) $(u_n)_{n=1, \dots, \infty}$, $u_n \in X$, mit $\lim_{n \rightarrow \infty} I[u_n] = 0$. Wir unterteilen das Intervall $(0, 1)$ in n Teilintervalle

$$(0, 1) = \left(0, \frac{1}{n}\right) \cup \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) \cup \dots \cup \left[\frac{n-1}{n}, 1\right)$$

und setzen

$$u_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{in } x = \frac{k}{n}, k = 0, \dots, n, \\ \frac{1}{2n} & \text{in } x = \frac{2k+1}{2n}, k = 0, \dots, n-1, \\ \text{linear ergänzt} & \text{sonst.} \end{cases}$$

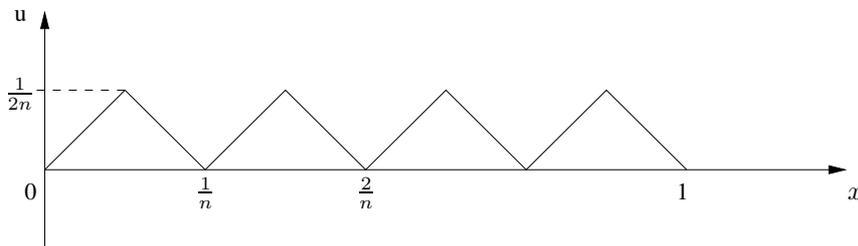


Abbildung 5.6: Die Funktion u_n

Es ist

$$0 \leq u_n(x) \leq \frac{1}{2n}, u_n \in \overset{\circ}{W}^{1,4}((0, 1)), u'_n(x) = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$$

und

$$I[u_n] = \int_0^1 \left(\frac{1}{4}(1 - (u'_n)^2)^2 + \frac{1}{2}(u_n(x))^2 \right) dx \leq \frac{1}{8n^2} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

2° Es gilt $I[u] > 0$ für alle $u \in X$. Wäre $I[u] = 0$, dann hätten wir

$$\int_0^1 \frac{1}{4}(1 - (u')^2)^2 dx = 0 \quad (5.21)$$

$$\text{und} \quad \int_0^1 \frac{1}{2}u^2 dx = 0. \quad (5.22)$$

Aus (5.21) folgt $u' = \pm 1$ f.ü. und aus (5.22) $u = 0$ f.ü., was nicht sein kann.

3° Es ist

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{\overset{\circ}{W}^{1,4}((0,1))}^4 &= \int_0^1 |u'_n|^4 dx + \int_0^1 |u_n|^4 dx \\ &\leq 1 + \frac{1}{16n^4}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

d.h. $(u_n)_n$ ist eine beschränkte Folge in $\overset{\circ}{W}^{1,4}((0,1))$ und es existiert damit eine schwach konvergente Teilfolge $(u_{n_j})_j, u_{n_j} \rightharpoonup u$. Wir haben also

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} I[u_n] = 0$
- b) $u_{n_j} \rightharpoonup u \in \overset{\circ}{W}^{1,4}(\Omega)$
- c) $I[u] \neq 0$.

■

Es reicht aber aus zu garantieren, dass

$$I[u] \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} I[u_{k_j}].$$

In diesem Fall wäre

$$\begin{aligned} I[u] &\leq m, \\ m &= \inf_{w \in X} I[w] \leq I[u], \end{aligned}$$

d.h. u ist tatsächlich ein Minimierer.

Wir fassen die Erläuterung zusammen und definieren:

Definition 34 Das Funktional $I[\cdot]$ ist schwach unterhalb folgenstetig in $W^{1,q}(\Omega)$, falls aus

$$u_k \rightharpoonup u \quad W^{1,q}(\Omega)$$

folgt

$$I[u] \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} I[u_k]. \quad (5.24)$$

Satz 19 Sei die differenzierbare Lagrange-Funktion L von unten beschränkt und die Abbildung $p \rightarrow L(p, z, x)$ konvex für alle $z \in \mathbb{R}, x \in \Omega$. Dann ist $I[\cdot]$ schwach unterhalb folgenstetig in $W^{1,q}(\Omega)$.

Beweis

Wir betrachten eine Folge $(u_k)_{k=1,2,\dots}$ die schwach in $W^{1,q}(\Omega)$ konvergiert:

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{in } W^{1,q}(\Omega).$$

Wir setzen

$$l = \liminf_{k \rightarrow \infty} I[u_k].$$

Wir wählen eine geeignete Teilfolge von (u_k) , die ebenfalls mit (u_k) bezeichnet wird, so dass $l = \lim_{k \rightarrow \infty} I[u_k]$ ist. Wir zeigen, dass $I[u] \leq l$ ist.

1.Schritt: Es gilt $W^{1,q}(\Omega) \xrightarrow{\text{kompakt}} L_q(\Omega)$, d.h. aus $u_k \rightharpoonup u$ in $W^{1,q}(\Omega)$ folgt $u_k \rightarrow u$ in $L_q(\Omega)$. Daraus folgt $u_k \rightarrow u$ f.ü. in Ω und somit

$$u_k \rightarrow u \text{ gleichmäßig in } \Omega_\varepsilon, |\Omega_\varepsilon - \Omega| < \varepsilon. \quad (5.25)$$

Sei

$$F_\varepsilon = \left\{ x \in \Omega : |u(x)| + |Du(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon} \right\}. \quad (5.26)$$

Dann haben wir

$$|\Omega - F_\varepsilon| \rightarrow 0 \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Wir setzen $G_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \cap F_\varepsilon$. Dann gilt

$$|\Omega - G_\varepsilon| \rightarrow 0 \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (5.27)$$

2.Schritt: Sei

$$L \geq 0 \text{ (sonst setze } \tilde{L} = L + \beta). \quad (5.28)$$

Dann ist

$$\begin{aligned} I[u_k] &= \int_{\Omega} L(Du_k, u_k, x) \, dx \stackrel{(5.28)}{\geq} \int_{G_\varepsilon} L(Du_k, u_k, x) \, dx \\ &\stackrel{(5.12)}{\geq} \int_{G_\varepsilon} (L(Du, u_k, x) + D_{\tilde{p}}L(Du, u_k, x) \cdot (Du_k - Du)) \, dx \end{aligned} \quad (5.29)$$

Da in G_ε (5.25) und (5.26) gilt, folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{G_\varepsilon} L(Du, u_k, x) \, dx \rightarrow \int_{G_\varepsilon} L(Du, u, x) \, dx.$$

Da $L_{\tilde{p}}(Du, u_k, x) \xrightarrow{\text{glm}} D_{\tilde{p}}L(Du, u, x)$ in G_ε und $Du_k \rightharpoonup Du$ in $L^q(\Omega, \mathbb{R}^n)$ erhalten wir

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{G_\varepsilon} D_{\tilde{p}}L(Du, u_k, x) \cdot (Du_k - Du) \, dx = 0. \quad (5.30)$$

3.Schritt: Wir erhalten aus (5.29) und (5.30)

$$l = \lim_{k \rightarrow \infty} I[u_k] \geq \int_{G_\varepsilon} L(Du, u, x) dx \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (5.31)$$

$$l \geq \int_{\Omega} L(Du, u, x) dx = I[u]. \quad (5.32)$$

Damit gilt die Behauptung (5.24)

$$I[u] \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} I[u_k] = l.$$

■

Bemerkung

Satz 19 gilt auch, falls keine Differenzierbarkeit von L vorausgesetzt wird. Man benutze Lemma 13 anstatt (5.12).

Satz 20 (Existenz eines Minimierers) Die differenzierbare Lagrange-Funktion L genüge einer Koerzitivitätsungleichung für $q > 1$ und sei konvex bezüglich \vec{p} . Die zulässige Menge X sei nicht leer. Dann existiert ein Element $u \in X$, so dass

$$I[u] = \min_{w \in X} I[w].$$

Beweis

1. Auswahl einer minimierenden Folge.

Sei $m = \inf_{w \in X} I[w]$. Wir wählen eine minimierende Folge $(u_k)_{k=1,2,\dots}$

$$I[u_k] \rightarrow m. \quad (5.33)$$

2. Beschränktheit der minimierenden Folge.

Wir können annehmen, dass $L(\vec{p}, z, x) \geq \hat{\alpha}|\vec{p}|^q$ ist, d.h. $\hat{\beta} = 0$. Falls nicht, können wir $\tilde{L} = L + \hat{\beta}$ anstelle von L betrachten. Es folgt, dass

$$I[w] = \int_{\Omega} L(Dw, w, x) dx \geq \alpha \int_{\Omega} |Dw|^q dx \quad (5.34)$$

ist. Daher gilt nach (5.33)

$$\sup_k \|Du_k\|_{L^q(\Omega)} < \infty.$$

Da $u_k \in X$ können wir analog zu (5.18) folgern, dass $\|u_k\|_{L^q(\Omega)} \leq c$. Daher ist die minimierende Folge $(u_k)_{k=1,2,\dots}$ in $W^{1,q}(\Omega)$ beschränkt.

3. Schwache Konvergenz einer Teilfolge

Eine beschränkte Folge in einem reflexiven Banachraum besitzt eine schwach konvergente Teilfolge

$$u_{k_j} \rightharpoonup u \quad \text{in } W^{1,q}(\Omega).$$

$u \in X$, d.h. $u|_{\partial\Omega} = g$.

Da für ein $w \in X$, $u_{k_j} - w \in \overset{\circ}{W}^{1,q}(\Omega)$ und diese Menge schwach abgeschlossen ist, muss $u - w \in \overset{\circ}{W}^{1,q}(\Omega)$ sein. Das bedeutet $u|_{\partial\Omega} = g$.

4. Konvexität, Satz 19

Satz 19 sichert, dass $I[u] \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \inf I[u_{k_j}] = m$ und daher

$$I[u] = m = \min_{w \in X} I[w].$$

■

Eindeutigkeit

Im allgemeinen können mehrere Minimierer auftreten. Betrachten wir das Beispiel

$$I[u] = \int_0^1 (1 - (u')^2)^2 dx \quad \text{in } \overset{\circ}{W}^{1,4}((0,1)) = X.$$

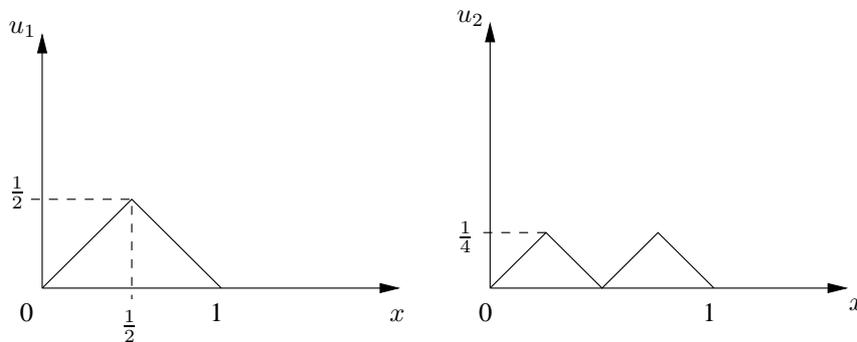


Abbildung 5.7: Die Funktionen u_1 und u_2

Es ist

$$\inf_{u \in X} I[u] = 0,$$

$$I[u_1] = 0, \quad u_1 \in \overset{\circ}{W}^{1,4}((0,1)) \quad \text{siehe Abbildung 5.7,}$$

$$I[u_2] = 0, \quad u_2 \in \overset{\circ}{W}^{1,4}((0,1)) \quad \text{siehe Abbildung 5.7.}$$

L sei weiterhin nach \vec{p} differenzierbar.

Satz 21 Sei $I[u] = \int_{\Omega} L(Du, x) dx$, d.h. die Lagrange-Funktion hängt nicht von $z = u$ ab. Außerdem existiere eine Konstante $c > 0$, so dass

$$\sum_{i,j=1}^n L_{p_i p_j}(\vec{p}, x) \xi_i \xi_j \geq c |\vec{\xi}|^2 \quad \forall \vec{p}, \vec{\xi} \in \mathbb{R}^n, x \in \Omega. \quad (5.35)$$

Dann gilt:

Falls ein Minimierer von $I[u]$ in $X = \{u \in W^{1,q}(\Omega) : u = g, q > 1\}$ existiert, dann ist er eindeutig.

Beweis

Seien u_1 und u_2 zwei Minimierer von $I[u]$ in X und $\tilde{u} = \frac{u_1 + u_2}{2}$. Die gleichmäßige Konvexitätsbedingung (5.35) besagt, dass die Lagrange-Funktion

$$\tilde{L} = L - c \frac{|\vec{p}|^2}{2}$$

konvex ist. Daher ist nach (5.13)

$$\tilde{L}(\vec{p}, x) \geq \tilde{L}(\vec{q}, x) + D_{\vec{p}}\tilde{L}(\vec{q}, x) \cdot (\vec{p} - \vec{q}).$$

Es folgt

$$L(\vec{p}, x) - c\frac{|\vec{p}|^2}{2} \geq L(\vec{q}, x) - c\frac{|\vec{q}|^2}{2} + D_{\vec{p}}L(\vec{q}, x) \cdot (\vec{p} - \vec{q}) - c\vec{q} \cdot (\vec{p} - \vec{q})$$

und damit

$$L(\vec{p}, x) \geq L(\vec{q}, x) + D_{\vec{p}}L(\vec{q}, x) \cdot (\vec{p} - \vec{q}) + c \underbrace{\left[\frac{|\vec{p}|^2}{2} - \frac{|\vec{q}|^2}{2} + |\vec{q}|^2 - \vec{p} \cdot \vec{q} \right]}_{=\frac{1}{2}|\vec{p}-\vec{q}|^2}.$$

Wir erhalten

$$L(\vec{p}, x) \geq L(\vec{q}, x) + D_{\vec{p}}L(\vec{q}, x) \cdot (\vec{p} - \vec{q}) + \frac{c}{2}|\vec{p} - \vec{q}|^2 \quad \forall \vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}^n, x \in \Omega. \quad (5.36)$$

Wir setzen $\vec{q} = \frac{Du_1 + Du_2}{2} = D\tilde{u}$, $\vec{p} = Du_1$ und integrieren (5.36) über Ω :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} L(\vec{q}, x) + D_{\vec{p}}L(\vec{q}, x)(\vec{p} - \vec{q}) + \frac{c}{2}|\vec{p} - \vec{q}|^2 dx \\ = I(\tilde{u}) + \int_{\Omega} D_{\vec{p}}L(D\tilde{u}, x)\left(\frac{Du_1 - Du_2}{2}\right) + \frac{c}{8}|Du_1 - Du_2|^2 dx \leq I(u_1). \end{aligned}$$

Für $\vec{q} = \frac{Du_1 + Du_2}{2}$, $\vec{p} = Du_2$ gilt entsprechend

$$I(\tilde{u}) + \int_{\Omega} D_{\vec{p}}L(D\tilde{u}, x)\left(\frac{Du_2 - Du_1}{2}\right) + \frac{c}{8}|Du_1 - Du_2|^2 dx \leq I(u_2). \quad (5.37)$$

Bilden wir $((5.36) + (5.37))/2$, dann folgt

$$I[\tilde{u}] + \frac{c}{8} \int_{\Omega} |Du_1 - Du_2|^2 dx \leq \frac{I[u_1] + I[u_2]}{2}. \quad (5.38)$$

und

$$I[\tilde{u}] \leq \frac{I[u_1] + I[u_2]}{2} = I[u_1] = I[u_2]. \quad (5.39)$$

Da

$$I[u_1] = I[u_2] = \min_{w \in X} I[w] \leq I[u_1] = I[u_2]$$

muss $Du_1 = Du_2$ f.ü. in Ω sein, d.h. u_1 und u_2 unterscheiden sich nur durch eine Konstante. Da $u_1 = u_2 = g$ auf $\partial\Omega$ folgt $u_1 = u_2$ f.ü. in Ω . ■

Beispiele

1° Sei $L(\vec{p}, z, x) = \frac{1}{2}|\vec{p}|^2$ ($\Delta u = 0$ in Ω , $u = g$ auf $\partial\Omega$). Dann ist $\sum_{i=1}^n L_{p_i p_j} \xi_i \xi_j = |\vec{\xi}|^2$.

2° Für $L(\vec{p}, z, x) = \frac{1}{2}A\vec{p} \cdot \vec{p}$ ist $\sum_{i=1}^n L_{p_i p_j} \xi_i \xi_j = \vec{\xi}^T A \vec{\xi} \geq c\|\vec{\xi}\|^2$, falls A positiv definit ist.

3° Wir betrachten die Lagrange-Funktion für den q -Laplace Operator
 $L = L(\vec{p}, z, x) = \frac{1}{q}|\vec{p}|^q$. Es ist

$$L_{p_i p_j}(\vec{p}) = |\vec{p}|^{q-4}(\delta_{ij}|\vec{p}|^2 + (q-2)p_i p_j)$$

und für $q \neq 2$ ist

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L_{p_i p_j}(\vec{p}) p_i p_j = (q-1)|\vec{p}|^q \not\geq c|\vec{p}|^2$$

für $q \neq 2$, für alle $\vec{p} = \vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$. Damit ist $L = L(\vec{p})$ nicht gleichmäßig konvex.

Eindeutigkeit und strikte Konvexität

Die Eindeutigkeit eines Minimierers kann man auch garantieren, wenn man die strikte Konvexität bezüglich der Argumente \vec{p} und z fordert.

Definition 35 $L : (\vec{p}, z) \rightarrow L(\vec{p}, z, x)$ ist strikt konvex, falls

$$L(\tau \vec{p}_1 + (1-\tau)\vec{p}_2, \tau z_1 + (1-\tau)z_2, x) < \tau L(\vec{p}_1, z_1, x) + (1-\tau)L(\vec{p}_2, z_2, x)$$

für alle $(\vec{p}_i, z_i) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $i = 1, 2$, $(\vec{p}_1, z_1) \neq (\vec{p}_2, z_2)$ für alle $x \in \Omega$, $\forall \tau \in (0, 1)$ gilt.

Bemerkung

Ist L differenzierbar nach \vec{p} und z , dann ist die strikte Konvexität äquivalent zu

$$L(\vec{p}_1, z_1, x) > L(\vec{p}_2, z_2, x) + D_{\vec{p}}L(\vec{p}_2, z_2, x) \cdot (\vec{p}_1 - \vec{p}_2) + D_z L(\vec{p}_2, z_2, x)(z_1 - z_2) \\ \forall (\vec{p}_i, z_i) \in \mathbb{R}^{n+1}, (\vec{p}_1, z_1) \neq (\vec{p}_2, z_2), \forall x \in \Omega. \quad (5.40)$$

Lemma 14 Ist $L : (\vec{p}, z) \rightarrow L(\vec{p}, z, x)$ für alle $x \in \Omega$ strikt konvex und besitzt $I[\cdot]$ einen Minimierer in X , dann ist dieser eindeutig bestimmt.

Beweis

Seien u_1 und u_2 zwei Minimierer von $I[w] = \int_{\Omega} L(Dw, w, x) dx$, $u_1 \neq u_2$.

Dann folgt aus (5.40)

$$L(Du_1, u_1, x) > L(Du_2, u_2, x) + D_{\vec{p}}L(Du_2, u_2, x)(Du_1 - Du_2) + D_z L(Du_2, u_2, x)(u_1 - u_2)$$

und

$$I[u_1] > I[u_2] + \int_{\Omega} D_{\vec{p}}L(Du_2, u_2, x)(Du_1 - Du_2) + D_z L(Du_2, u_2, x)(u_1 - u_2) dx.$$

$v = u_1 - u_2$ befindet sich in $\overset{\circ}{W}^{1,q}(\Omega)$. Da u_2 Minimierer ist, verschwindet notwendigerweise das Integral auf der rechten Seite. Damit ist $I[u_1] > I[u_2]$ und u_1 ist kein Minimierer. ■

Schwache Lösungen von Euler-Lagrange Gleichungen

Wir haben gesehen, unter welchen Voraussetzungen ein Minimierer in X für ein gegebenes Funktional $I : X \rightarrow \mathbb{R}, I[u] = \int_{\Omega} L(Du, u, x) dx$, existiert. Wir untersuchen jetzt die Frage, wann ein solcher Minimierer schwache Lösung der entsprechenden Euler-Lagrange Gleichung ist. Wir haben bereits gesehen, dass für eine differenzierbare Lagrange-Funktion L aus der notwendigen Bedingung $i'(0) = 0$ für einen genügend glatten Minimierer u folgt

$$\int_{\Omega} D_{\vec{p}}L(Du, u, x) \cdot \nabla v + D_z L(Du, u, x)v dx = 0 \quad \forall v \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Da $C_0^{\infty}(\Omega)$ dicht in $\overset{\circ}{W}^{1,q}(\Omega)$ ist, kommen wir unmittelbar zu folgender Definition:

Definition 36 Ein Element $u \in X = \{w \in W^{1,q}(\Omega) : w = g \text{ auf } \partial\Omega\}$ ist schwache Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} D_{\vec{p}}L(Du, u, x) + D_z L(Du, u, x) &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (5.41)$$

falls gilt

$$\int_{\Omega} D_{\vec{p}}L(Du, u, x) \cdot \nabla v + D_z L(Du, u, x)v dx = 0 \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}^{1,q}(\Omega). \quad (5.42)$$

Satz 22 Die differenzierbare Lagrange-Funktion L genüge folgenden Wachstumsbedingungen: es existiere eine Konstante $c > 0$, so dass

$$|L(\vec{p}, z, x)| \leq c(|\vec{p}|^q + |z|^q + 1) \quad (5.43)$$

$$|D_{\vec{p}}L(\vec{p}, z, x)| \leq c(|\vec{p}|^{q-1} + |z|^{q-1} + 1) \quad (5.44)$$

$$|D_z L(\vec{p}, z, x)| \leq c(|\vec{p}|^{q-1} + |z|^{q-1} + 1) \quad (5.45)$$

für alle $\vec{p} \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}, x \in \Omega$. Dann ist ein Minimierer $u \in X = \{w \in W^{1,q}(\Omega) : w = g \text{ auf } \partial\Omega\}$ von $I[\cdot]$,

$$I[u] = \min_{w \in X} I[w],$$

eine schwache Lösung von (5.41), d.h. die Relation (5.42) gilt.

Beweis

Die Bedingung (5.43) sichert, dass für ein beliebiges $v \in \overset{\circ}{W}^{1,q}(\Omega)$

$$i(\tau) := I[u + \tau v], \quad \tau \in \mathbb{R},$$

wohldefiniert ist. Damit existiert der Differenzenquotient für $\tau \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{i(\tau) - i(0)}{\tau} &= \int_{\Omega} \frac{L(Du + \tau Dv, u + \tau v, x) - L(Du, u, x)}{\tau} dx \\ &= \int_{\Omega} L^{\tau}(x) dx. \end{aligned}$$

Aufgrund der Differenzierbarkeit von L existiert der Differentialquotient

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} L^{\tau}(x) = D_{\vec{p}}L(Du, u, x) \cdot Dv + D_z L(Du, u, x)v \text{ f.ü.}$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} i'(0) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{i(\tau) - i(0)}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{\Omega} L^{\tau}(x) \, dx \stackrel{\text{Lebesgue}}{=} \int_{\Omega} \lim_{\tau \rightarrow 0} L^{\tau}(x) \, dx \\ &= \int_{\Omega} D_{\vec{p}}(Du, u, x) \cdot Dv + D_z(Du, u, x)v \, dx \end{aligned}$$

wohl definiert. Die Vertauschbarkeit $\lim \int = \int \lim$ folgt aus dem Satz von Lebesgue, da $L^{\tau}(x)$ durch integrierbare Funktionen majorisiert wird:

$$L^{\tau}(x) \leq c(|Du|^q + |u|^q + |Dv|^q + |v|^q + 1). \quad (5.46)$$

Die Abschätzung (5.46) können wir wie folgt zeigen: Da L differenzierbar ist, gilt

$$\begin{aligned} L^{\tau}(x) &= \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \frac{d}{ds} L(Du + sDv, u + sv, x) \, ds \\ &= \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} (L_{\vec{p}}(Du + sDv, u + sv, x) \cdot Dv + L_z(Du + sDv, u + sv, x)v) \, ds \\ &\leq \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} (|L_{\vec{p}}(Du + sDv, u + sv, x)||Dv| + |L_z(Du + sDv, u + sv, x)||v|) \, ds \\ &\stackrel{ab \leq \frac{a^q}{q'} + \frac{b^q}{q}}{\leq} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \left(\frac{|L_{\vec{p}}(Du + sDv, u + sv, x)|^{q'}}{q'} + \frac{|Dv|^q}{q} + \frac{|L_z(Du + sDv, u + sv, x)|^{q'}}{q'} + \frac{|v|^q}{q} \right) \, ds \\ &\stackrel{(5.44), (5.45)}{\leq} c \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} (|Du + sDv|^{q'(q-1)} + |u + sv|^{q'(q-1)} + 1 + |Dv|^q + |v|^q) \, ds \\ &\stackrel{q'(q-1)=q}{\leq} c \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} (|Du|^q + s^q |Dv|^q + |u|^q + s^q |v|^q + 1 + |Dv|^q + |v|^q) \, ds \\ &\stackrel{\tau \text{ beschränkt}}{\leq} c[|Du|^q + |u|^q + |Dv|^q + |v|^q + 1]. \end{aligned}$$

Da u Minimierer von $I[\cdot]$ ist, muss $i'(0) = 0$ sein. Damit ist

$$i'(0) = \int_{\Omega} D_{\vec{p}}(Du, u, x) \cdot \nabla v + D_z(Du, u, x)v \, dx = 0 \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}^{1,q}(\Omega)$$

und u ist schwache Lösung. ■

Umgekehrt kann man jedoch nicht garantieren, dass jede schwache Lösung ein Minimierer des entsprechenden Funktionals ist. Es gilt jedoch:

Lemma 15 *Ist die differenzierbare Lagrange-Funktion $L : (\vec{p}, z) \rightarrow L(\vec{p}, z, x)$ konvex für jedes $x \in \Omega$, dann ist eine schwache Lösung $u \in X$ ein Minimierer des entsprechenden Funktionals.*

Beweis

Sei u schwache Lösung, d.h.

$$\int_{\Omega} (D_{\vec{p}}L(Du, u, x) \cdot Dv + D_zL(Du, u, x)v) dx = 0 \quad \forall v \in \mathring{W}^{1,q}(\Omega). \quad (5.47)$$

Die Konvexitätsungleichung lautet

$$L(\vec{p}_1, z_1, x) \geq L(\vec{p}_2, z_2, x) + D_{\vec{p}}L(\vec{p}_2, z_2, x) \cdot (\vec{p}_1 - \vec{p}_2) + D_zL(\vec{p}_2, z_2, x)(z_1 - z_2). \quad (5.48)$$

Sei $\vec{p}_2 = Du(x)$, $z_2 = u(x)$, $\vec{p}_1 = Dw(x)$, $z_1 = w(x)$, wobei w ein beliebiges Element aus X ist. Da $v = u - w \in \mathring{W}^{1,q}(\Omega)$, folgt nach Integration von (5.48) über Ω unter Beachtung von (5.47)

$$I[w] \geq I[u] \quad \forall w \in X,$$

d.h. u ist ein Minimierer. ■

Bemerkung

Die direkte Methode der Variationsrechnung befasst sich damit, direkt nachzuweisen, dass ein gegebenes Funktional $I = I[w]$ ein Minimum in X besitzt. Ist dieses Minimum genügend glatt und die Lagrange-Funktion genügend oft differenzierbar, dann wird es eine Lösung der Euler-Lagrange Gleichung sein.

Die indirekte Methode der Variationsrechnung geht von einer Euler-Lagrange Gleichung aus. Diejenigen Lösungen sind herauszusuchen, die Minimum eines zugeordneten Funktionals sind.

Wir haben folgende Ergebnisse hergeleitet:

Direkte Methode

Sei $I[w] = \int_{\Omega} L(Dw, w, x) dx$.

(i) L genüge einer Koerzivitätsungleichung

$$|L(\vec{p}, z, x)| \geq \hat{\alpha}|\vec{p}|^q - \hat{\beta}. \quad (5.49)$$

(ii) L sei konvex bezüglich \vec{p} .

(iii) $X = \{w \in W^{1,q}(\Omega), w = g \text{ auf } \partial\Omega\}$ sei nicht leer.

Dann existiert ein $u \in X$, so dass

$$I[u] = \min_{w \in X} I[w].$$

Ist die Lagrange-Funktion L differenzierbar nach \vec{p} und z und genügt Wachstumsbedingungen

$$\begin{aligned} |L(\vec{p}, z, x)| &\leq c(|\vec{p}|^q + |z|^q + 1), \\ |L_{\vec{p}}(\vec{p}, z, x)| + |L_z(\vec{p}, z, x)| &\leq c(|\vec{p}|^{q-1} + |z|^{q-1} + 1), \end{aligned}$$

dann ist ein Minimierer von $I[\cdot]$ schwache Lösung der Euler-Lagrange Gleichung, d.h.

$$\int_{\Omega} L_{\vec{p}}(Du, u, x) \cdot Dv + L_z(Du, u, x)v dx = 0 \quad \forall v \in \mathring{W}^{1,q}(\Omega).$$

Indirekte Methode

Ist die differenzierbare Lagrange-Funktion $L : (\vec{p}, z) \rightarrow L(\vec{p}, z, x)$ konvex in (\vec{p}, z) , dann ist eine schwache Lösung $u \in X$ ein Minimierer des entsprechenden Funktionals.

Spezialfall (Linearer Fall)

Satz 23 Sei $I[u] = \frac{1}{2}a(u, u) - \langle F, u \rangle$ ein Energiefunktional, wobei $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $V \subset W^{1,2}(\Omega)$, eine symmetrische V -elliptische Bilinearform ist und $F \in V'$. Dann ist $I[\cdot] : V \rightarrow \mathbb{R}$ strikt konvex. Es existiert ein eindeutiger Minimierer $u \in V$, der Lösung des schwachen Problems

$$a(u, v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in V$$

ist, d.h.

$$I[u] = \min_{v \in V} I[v] \Leftrightarrow a(u, v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in V. \quad (5.50)$$

Beweis:

1.Schritt Wir formulieren die strikte Konvexität für Funktionale

Definition 37 (konvexes Funktional) Ein Funktional $J : K \subset V \rightarrow \mathbb{R}$, definiert auf einer konvexen Teilmenge K eines Vektorraums V ist konvex, wenn für alle $u, v \in K$, $\alpha \in [0, 1]$ gilt

$$J(\alpha u + (1 - \alpha)v) \leq \alpha J(u) + (1 - \alpha)J(v).$$

J ist strikt konvex auf K , wenn für $u, v \in K$, $u \neq v$, $\alpha \in (0, 1)$ gilt

$$J(\alpha u + (1 - \alpha)v) < \alpha J(u) + (1 - \alpha)J(v). \quad (5.51)$$

Satz 24 (Konvexität und Ableitungen) [22, S.247, S.249ff]

Sei $J : K \rightarrow \mathbb{R}$ ein Funktional über einer konvexen Teilmenge $K \subset V$ eines normierten Vektorraums V . J sei differenzierbar auf K . Dann gilt

a) J ist konvex auf K genau dann, wenn

$$J(v) \geq J(u) + J'(u)(v - u) \quad \forall u, v \in K.$$

b) J ist strikt konvex genau dann, wenn

$$J(v) > J(u) + J'(u)(v - u) \quad \forall u, v \in K, u \neq v.$$

Weiterhin wird J auf K genau dann für ein $u \in K$ minimal, wenn

$$J'(u)(u - v) \geq 0 \quad \forall v \in K.$$

Ist die Menge K offen, so wird J für ein $u \in K$ genau dann minimal, wenn $J'(u) = 0$ ist.

2.Schritt Um den Satz 23 zu beweisen, benutzen wir Satz 24 und zeigen zunächst die Relation (5.51). Dazu berechnen wir $J'(u)(v - u)$: Es ist

$$J(u + h) = J(u) + J'(u)h + o(\|h\|). \quad (5.52)$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
 J(u+h) &= \frac{1}{2}a(u+h, u+h) - \langle F, u+h \rangle \\
 &= \frac{1}{2}a(u, u) + a(u, h) + \frac{1}{2}a(h, h) - \langle F, u \rangle - \langle F, h \rangle \\
 &= \frac{1}{2}a(u, u) - \langle F, u \rangle + a(u, h) - \langle F, h \rangle + \frac{1}{2}a(h, h) \\
 &= J(u) + J'(u)h + o(\|h\|),
 \end{aligned} \tag{5.53}$$

$$\text{mit } J'(u)h \stackrel{(5.52)}{=} a(u, h) - \langle F, h \rangle. \tag{5.54}$$

Aufgrund von (5.54) ist für $h = v - u$

$$J(u) + J'(u)(v-u) = \frac{1}{2}a(u, u) - \langle F, u \rangle + a(u, v-u) - \langle F, v-u \rangle \tag{5.55}$$

$$= -\frac{1}{2}a(u, u) + a(u, v) - \langle F, v \rangle \tag{5.56}$$

und

$$\begin{aligned}
 J(v) &= \frac{1}{2}a(v, v) - \langle F, v \rangle \\
 &> -\frac{1}{2}a(u, u) + a(u, v) - \langle F, v \rangle \\
 &\stackrel{(5.55)}{=} J(u) + J'(u)(v-u),
 \end{aligned}$$

da

$$\frac{1}{2}a(v, v) + \frac{1}{2}a(u, u) - a(u, v) = \frac{1}{2}a(u-v, u-v) > 0 \quad \forall u \neq v.$$

3.Schritt Die Relation (5.50) kann wie folgt bewiesen werden.

Wir nehmen zunächst an, dass $a(u, v) = \langle F, v \rangle$ ist für alle $v \in V$.

Dann ist

$$\begin{aligned}
 J(u+tv) &= J(u) + t[a(u, v) - \langle F, v \rangle] + \frac{1}{2}t^2a(v, v) \\
 &= J(u) + \frac{1}{2}t^2a(v, v) \geq J(u) \quad \forall t \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Es folgt

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v).$$

Nun nehmen wir an, dass $J(u) = \min J(v)$. Das Minimum eines strikt konvexen Funktionals ist eindeutig bestimmt. Ist $g(t) = J(u+tv)$ minimal für $t = 0$, dann ist

$$g'(0) = J'(u)v \stackrel{(5.54)}{=} a(u, v) - \langle F, v \rangle = 0$$

und somit folgt $a(u, v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in V$. ■

Bemerkung

Betrachten wir eine konvexe Teilmenge $K \subset V$ statt des ganzen Vektorraums V , so bekommen wir eine äquivalente Variations-Ungleichung.

Lemma 16 Sei die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ V -elliptisch (positiv definit). Sei $K \subset V$ eine konvexe Teilmenge. Dann gilt für $u \in K$

$$J(u) = \min_{v \in K} J(v) \Leftrightarrow a(u, v-u) \geq \langle F, v-u \rangle \quad \forall v \in K.$$

5.3 Systeme

Wir haben bereits im Abschnitt 5.1 Funktionale $I = I[\vec{w}]$ und entsprechende Systeme von Euler-Lagrange Gleichungen betrachtet. Die Unterschiede zu den skalaren Gleichungen waren nur technischer Natur. Die Aussagen des Abschnitts 5.2 können deshalb ohne Schwierigkeiten auf Systeme übertragen werden. Wir formulieren daher nur die wichtigsten Begriffe und Ergebnisse.

Konvexität

Sei

$$I = I[\vec{w}] := \int_{\Omega} L(D\vec{w}, \vec{w}, x) dx,$$

wobei $\vec{w} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $L : \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^m \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. L ist konvex bezüglich $P = D\vec{w}$, falls

$$\begin{aligned} L(\tau P + (1 - \tau)Q, \vec{z}, x) &\leq \tau L(P, \vec{z}, x) + (1 - \tau)L(Q, \vec{z}, x) \\ \forall P, Q \in \mathbb{R}^{m \times n}, \vec{z} \in \mathbb{R}^m, x \in \Omega, 0 \leq \tau \leq 1. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Koerzitivitätsungleichung

Die entsprechende Koerzitivitätsungleichung zu (5.5) lautet:

Es existieren Konstanten $\hat{\alpha} > 0$, $\hat{\beta} \geq 0$ und ein $q \in (1, \infty)$, so dass

$$L(P, \vec{z}, x) \geq \hat{\alpha}|P|^q - \hat{\beta} \quad \forall P \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad (5.58)$$

wobei $|P| = \sqrt{P : P}$.

Damit wird die entsprechende Menge X eingeführt als

$$X = \{\vec{w} \in [W^{1,q}(\Omega)]^m : \vec{w} = \vec{g} \text{ auf } \partial\Omega\}. \quad (5.59)$$

Satz 25 Sei L konvex in der Variablen P und genüge der Koerzitivitätsungleichung (5.58). Die Menge X , definiert in (5.59), sei nicht leer. Dann existiert ein $\vec{u} \in X$, so dass

$$I[\vec{u}] = \min_{\vec{w}} I[\vec{w}].$$

Satz 26 Die differenzierbare Lagrange-Funktion L genüge den Wachstumsbedingungen für eine Konstante $c > 0$:

$$\begin{aligned} |L(P, \vec{z}, x)| &\leq c(|P|^q + |\vec{z}|^q + 1), \\ |D_P L(P, \vec{z}, x)| + |D_{\vec{z}} L(P, \vec{z}, x)| &\leq c(|P|^{q-1} + |\vec{z}|^{q-1} + 1) \end{aligned}$$

für alle $P \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\vec{z} \in \mathbb{R}^m$, $x \in \Omega$. Dann gilt für ein $\vec{u} \in X$ mit

$$I[\vec{u}] = \min_{\vec{w} \in X} I[\vec{w}],$$

dass \vec{u} schwache Lösung des Systems der Euler-Lagrange-Gleichungen ist, d.h.

$$\int_{\Omega} D_P(D\vec{u}, \vec{u}, x) : D\vec{v} + D_{\vec{z}}(D\vec{u}, \vec{u}, x) \cdot \vec{v} dx = 0 \quad \forall \vec{v} \in [W^{1,q}(\Omega)]^m.$$

Polykonvexität

Es gibt Systeme von Euler-Lagrange Gleichungen, bzw. Lagrange-Funktionen, die z.B. das Verhalten nichtlinearer elastischer Materialien beschreiben, die nicht konvex sind. Trotzdem können die Methoden der Variationsrechnung angewandt werden. Bisher hatten wir gezeigt, dass aus der Konvexität die schwach unterhalb Folgenstetigkeit folgt. Die Konvexität wird durch den Begriff der Polykonvexität ersetzt.

Definition 38 (Polykonvexität) Sei $m = n$ und $L(P, \vec{z}, x) = F(P, \det P, \vec{z}, x) = F(P, r, \vec{z}, x)$, wobei $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$. Die Lagrange-Funktion L ist polykonvex, falls für jedes feste \vec{z} und x die Abbildung

$$F : (P, r) \rightarrow F(P, r, \vec{z}, x)$$

konvex ist.

Beispiel: Hyperelastische Materialien

Die Existenz von Minimierern für hyperelastische Materialien wurde von J. Ball (1977) untersucht. In diesem Fall wird das elastische Energiefunktional durch eine Lagrange-Funktion der Form

$$\hat{L}(P, x) = L(P, \text{Cof } P, \det P, x), \quad P \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3},$$

beschrieben. Die Polykonvexität besagt in diesem Fall, dass L konvex ist bezüglich des Arguments (P, Θ, r) ; $\Theta = \text{Cof } P = \det P P^{-\top}$.

Satz 27 [4, S.456] Sei $n < q < \infty$. Sei L von unten beschränkt und polykonvex. Dann ist

$$I[\vec{w}] = \int_{\Omega} L(D\vec{w}, \det(D\vec{w}), \vec{w}, x) \, dx$$

schwach unterhalb folgenstetig.

Satz 28 [4, S.457] Sei $n < q < \infty$ und L genüge der Koerzitivitätsungleichung (5.49) und sei polykonvex. Die Menge $X = \{\vec{w} \in [W^{1,q}(\Omega)]^n, \vec{w} = \vec{g} \text{ auf } \partial\Omega\}$ sei nicht leer. Dann existiert ein $\vec{u} \in X$, so dass

$$I[\vec{u}] = \min_{\vec{w} \in X} I[\vec{w}].$$

Beispiele

1° Lineare Elastizität

Es ist $L(P) = \frac{1}{2} \sigma(P) : \varepsilon(P)$, wobei $\varepsilon(P) = \frac{1}{2}(P + P^{\top})$ und $\sigma(P) = \lambda \text{tr} \varepsilon(P) I + 2\mu \varepsilon(P)$ sind. Wir untersuchen, ob die Lagrange-Funktion L konvex ist, indem wir überprüfen, wann

$$L(P_1) \geq L(P_2) + L_P(P_2) : (P_1 - P_2) \quad \forall P_1, P_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}, P_1 \neq P_2$$

gilt. Da $L_P(P_2) = \sigma(P_2)$ ist, folgt

$$\begin{aligned} L(P_1) - L(P_2) + L_P(P_2) : (P_2 - P_1) &= \frac{1}{2} \sigma(P_1) : \varepsilon(P_1) - \frac{1}{2} \sigma(P_2) : \varepsilon(P_2) \\ &\quad + \sigma(P_2) : (P_2 - P_1). \end{aligned}$$

Beachten wir, dass ε der symmetrische Anteil von Du ist und σ symmetrisch ist, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} L(P_1) - L(P_2) &+ L_P(P_2) : (P_2 - P_1) \\ &= \frac{1}{2}\sigma(P_1) : \varepsilon(P_1) + \frac{1}{2}\sigma(P_2) : \varepsilon(P_2) - \sigma(P_2) : \varepsilon(P_1) \\ &= \frac{1}{2}[\lambda(\operatorname{tr} \varepsilon(P_1))^2 + 2\mu(\varepsilon(P_1))^2 + \lambda(\operatorname{tr} \varepsilon(P_2))^2 + 2\mu(\varepsilon(P_2))^2] \\ &\quad - \lambda \operatorname{tr} \varepsilon(P_1) \operatorname{tr} \varepsilon(P_2) - 2\mu \varepsilon(P_2) : \varepsilon(P_1) \\ &= \lambda \left(\frac{\operatorname{tr} \varepsilon(P_1)}{\sqrt{2}} - \frac{\operatorname{tr} \varepsilon(P_2)}{\sqrt{2}} \right)^2 + \mu |\varepsilon(P_1) - \varepsilon(P_2)|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

für $\lambda, \mu \geq 0$. Konvexität liegt vor, wenn $\varepsilon(P_1 - P_2) \neq 0$ bzw. $\operatorname{tr} \varepsilon(P_1 - P_2) \neq 0$, d.h. wenn die Differenz $P_1 - P_2$ keine schiefsymmetrische Matrix ergibt. In der Konvexitätsungleichung werden Randbedingungen nicht beachtet.

Unter Beachtung von Randbedingungen erhalten wir folgende Aussage. Die dem homogenen Dirichletproblem der linearen Elastizität zugeordneten Bilinearform

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(v) \, dx \quad u, v \in (H^1_0(\Omega))^n = V$$

genügt den Voraussetzungen des Satzes von Lax-Milgram und das Funktional

$$I : [H^1(\Omega)]^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$I[u] = \frac{1}{2}a(u, u) - \langle F, u \rangle$$

mit $F \in V'$ ist nach Satz 23 strikt konvex.

2° Wir betrachten die Lagrange-Funktion

$$L = L(P) = [\operatorname{tr} (PP^T)]^{\frac{q}{2}}, q \geq 1.$$

Es ist $\operatorname{tr} (PP^T) = P : P$ und

$$L_P(P) = q[\operatorname{tr} (PP^T)]^{\frac{q}{2}-1} P = q|P|^{q-2} P.$$

Wir prüfen, ob L konvex ist.

$$\begin{aligned} L(P_1) - L(P_2) &+ L_P(P_2) : (P_2 - P_1) \\ &= |P_1|^q - |P_2|^q + q|P_2|^{q-2}(|P_2|^2 - P_2 : P_1) \end{aligned} \quad (5.60)$$

$$= |P_1|^q + (q-1)|P_2|^q - q|P_2|^{q-2}(P_2 : P_1) \quad (5.61)$$

$$\geq |P_1|^q + (q-1)|P_2|^q - q|P_2|^{q-1}|P_1|. \quad (5.62)$$

Wir wenden die Youngsche Ungleichung an: $ab = \frac{a^q}{q} + \frac{b^{q'}}{q'}, \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, und erhalten

$$\text{rechte Seite} \geq |P_1|^q + (q-1)P_2^q - q \left(\frac{|P_2|^{(q-1)q'}}{q'} + \frac{|P_1|^q}{q} \right) = 0,$$

d.h. L ist konvex. Ist $q = 2$, dann ist

$$L(P_1) - L(P_2) + L_P(P_2) : (P_2 - P_1) \stackrel{(5.61)}{=} |P_1 - P_2|^2 > 0 \text{ für } P_1 \neq P_2$$

und es liegt strikte Konvexität vor.

- 3° Geometrisch nichtlineare Materialien (St. Venant Materialien)
In diesem Fall ist der Verzerrungstensor

$$\begin{aligned}\varepsilon(u) &= \frac{1}{2}(Du + Du^\top + Du^\top Du), \\ \sigma(u) &= \lambda \operatorname{tr} \varepsilon I + 2\mu \varepsilon.\end{aligned}$$

Die elastische Energiedichte

$$L = \frac{1}{2} \sigma : \varepsilon$$

wird durch $P = Du$ in folgender Form ausgedrückt.

$$L(P) = - \left(\frac{3\lambda + 2\mu}{4} \right) \operatorname{tr}(P^\top P) + \left(\frac{\lambda + 2\mu}{8} \right) \operatorname{tr}(P^\top P)^2 + \frac{\lambda}{4} \operatorname{Cof}(P^\top P) + \frac{6\mu + 9\lambda}{8}.$$

Da $\operatorname{Cof}(P^\top P) = \operatorname{Cof} P^\top \operatorname{Cof} P = (\operatorname{Cof} P)^\top \operatorname{Cof} P$ folgt

$$L(P) = \hat{L}(P, \operatorname{Cof} P).$$

Diese Lagrange-Funktion ist nicht polykonvex.

- 4° Physikalische nichtlineare elastische Materialien vom Potenztyp
Der Verzerrungstensor hängt linear vom Deformationsgradienten Du ab:

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(Du + Du^\top).$$

Die Spannungs-Verzerrungsrelation ist jedoch nichtlinear, z.B. Ramberg/Osgood Materialien

$$\varepsilon = A\sigma + \frac{3}{2} \frac{\tilde{\alpha}}{E} \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_y} \right)^{n-1} \sigma^D,$$

wobei $\sigma^D = \sigma - \frac{1}{3} \operatorname{tr} \sigma I$, $\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2}} |\sigma^D|$, σ_y Fließspannung, $\tilde{\alpha}$, E , n Materialkonstanten sind. Hier ist die Lagrange-Funktion:

$$\frac{1}{2}(A\sigma : \sigma) + \frac{a}{q} |\sigma^D|^q, \quad q = n + 1.$$

Sie ist für $q > 2$ strikt konvex. Man spricht von Materialien vom Potenztyp, wenn für die Lagrange-Funktion gilt

$$\begin{aligned}C_0 + C_1 |P|^q \leq L(P) &\leq C_2 (1 + |P|^q) \\ |L_P(P)| &\leq c(1 + |P|^{q-1}) \\ |D_P^2 L(P)| &\leq c(1 + |P|^{q-2}) \\ D_P^2 L(P)[B, B] &\geq c(k + |P|^{q-2} |B|^2).\end{aligned}$$

Die letzte Bedingung garantiert die Konvexität.

Index

- q -Laplace Gleichung, 110
 - 1. Ficksches Gesetz, 20
 - 2. Ficksches Gesetz, 21
- Advektionsgleichung
 - lineare, 36
- Anfangsbedingung, 25
- Bahnkurve, 16
- Banachraum
 - reflexiver, 119
- Banachscher Fixpunktsatz, 82
- Bewegung, 15
- Biharmonische Gleichung, 11
- Bilinearform, 81
 - stetige, 81
- Burgers Gleichung, 13, 19, 37, 42, 44, 46
- Cauchy Problem, 33
- Charakteristik, 31, 33, 43
- Coulombsches Gesetz, 25
- Der Raum $\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, 94
- Der Raum $\mathring{W}^{k,p}(\Omega)$, 77
- Der Raum $\mathring{W}^{s,p}(\Omega)$, 88
- Der Raum $H^1((0, T), X)$, 98
- Der Raum $H^k(\Omega)$, 77
- Der Raum $H^{-k}(\Omega)$, 79
- Der Raum $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, 93
- Der Raum $L_{loc}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$, 40
- Der Raum $L_2((0, T), X)$, 98
- Der Raum $L_2(\Omega)$, 73
- Der Raum V_Ω , 91
- Der Raum $V_{\partial\Omega}$, 91
- Der Raum $W^{k,p}(\Omega)$, 77
- Der Raum $W^{s,p}(\Omega)$, 86
- Der Raum $\mathring{H}^k(\Omega)$, 77
- Dichtefunktion, 17, 24
- Differentialgleichungen
 - charakteristische, 33
- Diffusion, 20, 26
- Diffusionsgleichung, 22
 - inhomogene, 22
- Diffusionskonstante, 20, 21
- Diffusionsprozesse, 20
- Dini Formel, 63
- Dinische Formel, 59
- Dirichlet Bedingung, 26
- Dirichlet Problem in der Kugel, 63
- Dirichletproblem für die Poissongleichung, 89
- Duale Paarung, 79
- Eindeutigkeit, 46, 70
- Elastische Schwingungsgleichungen, 12
 - elliptisch, 50
 - energetisches Skalarprodukt, 83
- Energiedichte
 - elastische, 134
- Energiefunktional, 107
- Energiemethode, 72
- Entropie-Bedingung, 46
- Entropie-Lösung, 46
- Erhaltungsgleichung, 17
- Erste Variation, 109
- Euler Gleichungen, 13
- Euler-Lagrange Gleichung, 108
- Euler-Lagrange Gleichungen, 107
- Euler-Lagrange System der linearisierten Elastizität, 112
- Flüssigkeit
 - inkompressible, 25
- Fließvorgänge, 15
- Folge
 - infinimierende, 118
 - minimierende, 118
- Formale Lösung, 61
- formale Reihe, 60
- Fouriermethode, 58
- Fourierreihe, 60
- Funktional
 - konvexes, 129
 - strikt konvexes, 129
- Galerkin Lösung, 83, 105
- Gemischtes Randwertproblem für die Poissongleichung, 93
- Geschwindigkeit, 16

- Geschwindigkeit der Kurve, 41
 Greensche Funktion, 64, 68
 Gronwallsche Ungleichung, 99
- Hauptteil, 49
 Helmholtz-Gleichung, 11, 25
 hyperbolisch, 50
 Hyperelastische Materialien, 132
- Impuls, 24
 inkompressible Flüssigkeit, 25
 interface, 28
- Kinematische Strömungsmodelle, 19
 Klassifikation, 50
 Klassische Formulierung, 89
 Koerzitivitätsungleichung, 131
 Koerzitivität, 113
 Koerzitivitätsbedingung, 113, 114
 Kontinuitätsgleichung, 18
 Konvektion-Diffusions Gleichung, 23
 Konvektion-Diffusionsgleichungen, 12
 Konvergenzuntersuchungen, 67
 konvex, 117
 Konvexität, 115, 131
 Korrekt gestellte Probleme, 29
 Kugelfunktionen, 64
- Lagrange Dichtefunktion, 108
 Lagrange-Funktion, 111
 Lamé-Gleichungen, 12
 Laplace Gleichung, 11, 51
 Lax-Oleinik-Formel, 46
 Lemma von C ea, 85
 Lemma von Du Bois-Reymond, 74
 Lemma von Lax-Milgram, 81
 Lineare Advektionsgleichung, 18
 Lokale klassische Losungen, 33
- Massenerhaltungssatz, 17
 Maximumprinzip, 65, 69
 Maxwell-Gleichungen, 12
 Methode
 - direkte, 128
 - indirekte, 129
- Minimierung einer Oberfläche, 110
 Minimum
 - globales, 108
 - lokales, 108
- Navier-Stokes-Gleichungen, 13
 Negative Ableitungsordnung, 87
 Neumann Bedingung, 26
 Neumannproblem
 - für die Poissongleichung, 90
- Normalform, 52
- Operatorgleichung, 97
- p-Laplace-Gleichung, 13
 parabolisch, 50
 Partielle Differentialgleichung, 9
 - der Ordnung k , 9
 - homogene, 9
 - lineare, 9
 - quasilineare, 10
 - semilineare, 9
 - stark nichtlineare, 10
- Poincaré-Friedrichs Ungleichung, 77
 Poissonformel, 59, 64
 Poissongleichung, 11
 polykonvex, 132
 Potentialgleichung, 24
- Randbedingung, 26
 Rankine-Hugoniot Bedingung, 41, 43
 Reaktion-Diffusions Gleichungen, 23
 Reaktions-Diffusions-Gleichung, 13
 Reynolds'scher Transportsatz, 17
 Rieszscher Darstellungssatz, 82
 Robin Bedingung, 26
 Robinproblem für die Poissongleichung, 92
- Schockwelle, 44–46
 Schockwellen, 30
 Schrödinger-Gleichung, 11
 schwach unterhalb folgendstetig, 120
 Schwache Ableitungen, 75
 Schwache Formulierung, 80, 90
 Schwache Lösung, 39, 106
 Schwache Unterhalbstetigkeit, 118
 Schwingungen, 23
 - elastische, 23
- Separationsansatz, 59, 66
 Skalare Erhaltungsgleichung, 13
 Sobolev-Raum, 77
 Sobolev-Slobodeskij Raum, 86
 Sommerfeldsche
 - Ausstrahlungsbedingung, 28
- Sprung, 41
 Spuroperator, 88
 Spurraum, 87
 St. Venant Materialien, 134
 Stationäre Prozesse, 24
 Stokes-Gleichungen, 12
 strikt konvex, 117, 125
 Stromdichte, 20
 Sturm-Liouvillesches
 - Rand-Eigenwertproblem, 66

- System von m partiellen Differentialgleichungen, 10
- Träger einer Funktion, 74
- Trajektorie, 16
- Transformation
 - zulässige, 52
- Transmissionsbedingung, 28
- Transmissionsproblem für die Poissongleichung, 95
- Transportgleichung, 12, 17
- Transportvorgänge, 15
- Typeinteilung, 49

- Variationslemma, 74
- Verdünnungsfächer, 45, 47
- Verkehrsströmung, 19
- Volumenkräfte, 23

- Wärme
 - spezifische, 22
- Wärmeleitfähigkeit, 11
- Wärmeleitfähigkeit, 22
- Wärmeleitung, 27
- Wärmeleitungsgleichung, 11, 22, 51, 96
- Wärmemenge, 22
- Wärmestromdichte, 22
- Wellengleichung, 11, 51, 106

- Zulässige Funktionenmenge, 108, 114
- Zweite Variation, 115

Literaturverzeichnis

- [1] Aris, R. *The Mathematical Theory of Diffusion and Reaction in Permeable Catalysts*. Vol. 2, Oxford, 1975.
- [2] Burgers, I.M. *A mathematical model illustrating the effect of turbulence*. *Adv.Appl.Mech.* **1**, 1948, 171-199.
- [3] Dautry, R.; Lions, J.-L. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology* **Vol.2 Functional and Variational Methods**, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1992.
- [4] Evans, L.C. *Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, **Volume 19**, 1998.
- [5] Hackbusch, W. *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*. Teubner-Verlag, 1986.
- [6] John, F. *Partial Differential Equations*. Springer Verlag, 1982.
- [7] Kufner, A.; John, O.; Fučík, S. *Function Spaces*. Noordhoff International Publishing, Leyden, 1977.
- [8] Kufner, A.; Kadlec, J. *Fourier series* Iliffe Books, 1971.
- [9] Ladyženskaja, O.A.; Ural'ceva, N.N. *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*. Academic Press, New York and London, 1968.
- [10] Nečas, J. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Academia, Éditiones de l'Académie Tchecoslovaque des Sciences, Prague, 1967.
- [11] Renardy, M; Rogers, R.C. *An Introduction to Partial Differential Equations*. Springer Verlag, 1992.
- [12] Roberts, A.; Varberg, D. *Convex Functions*. Academic, New York, 1973
- [13] Rockafeller, R. *Convex Analysis* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1970
- [14] Rössle, A., Sändig, A.-M. *Stress singularities in bounded elastic materials* MAFELAP, Highlights 1996, ed. Whiteman, J.R., Wiley, 1997, 405-416.
- [15] Schwarz, H.R. *Methode der finiten Elemente*. G. Teubner, Stuttgart, 1991.
- [16] Smirnow, W.I. *Lehrgang der höheren Mathematik Teil II*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1968.
- [17] Strauss, W.A. *Partielle Differentialgleichungen*. Vieweg Verlag, 1995.
- [18] Triebel, H. *Höhere Analysis*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1972.

- [19] Vladimirov, V.S. *Equations of Mathematical Physics*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1971.
- [20] Warnecke, G. *Analytische Methoden in der Theorie der Erhaltungsgleichungen*, Teubner Verlag, 1999.
- [21] Wloka, I. *Partielle Differentialgleichungen*. Teubner Verlag, 1982.
- [22] Zeidler, E. *Applied Functional Analysis*,
Serie Applied Mathematical Sciences, Band 109. Springer-Verlag, 1995.

Danksagung

Hiermit möchte ich mich bei Herrn stud. math./phys. Markus Daub für das Schreiben und Überarbeiten des Textes, sowie für das Erstellen des Layouts und der Graphiken bedanken.

Prof. Dr. Anna-Margarete Sändig

Pfaffenwaldring 57

70569 Stuttgart

Germany

E-Mail: saendig@ians.uni-stuttgart.de

WWW: <http://ians.uni-stuttgart.de/~saendig/>

Erschienene Preprints ab Nummer 2006/001

Komplette Liste: <http://preprints.ians.uni-stuttgart.de>

- 2006/001 *Klimke, A.*: Sparse Grid Interpolation Toolbox - User's Guide
- 2006/002 *Klimke, A., Wohlmuth, B.*: Constructing Dimension-Adaptive Sparse Grid Interpolants using Parallel Function Evaluations
- 2006/003 *Hartmann, S., Brunssen, S., Ramm, E., Wohlmuth, B.*: Application of a primal-dual active set strategy for unilateral non-linear dynamic contact problems of thin-walled structures
- 2006/004 *Sändig, A.-M.*: Partielle Differentialgleichungen Vorlesung im Wintersemester 2005/2006