Partielle Differentialgleichungen

27. Für eine 2π–periodische Funktion $g(\varphi)$ seien durch

$$\widehat{g}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) e^{-ik\varphi} \, d\varphi \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}$$

die komplexen Fourierkoeffizienten gegeben. Für $s \in \mathbb{R}$ definiert

$$\|g\|_s := \left\{ |\widehat{g}(0)|^2 + \sum_{|k| \geq 1} |\widehat{g}(k)|^2 \, |k|^{2s} \right\}^{1/2}$$

eine Norm. Man zeige, dass diese für $m \in \mathbb{N}_0$ zur Norm in $W_2^m(0, 2\pi)$ äquivalent ist.

28. Für $s \in (\frac{1}{2}, 1)$ zeige man die Abschätzung

$$|g(\varphi) - g(\psi)|^2 \leq \frac{c}{2s-1} \, \|g\|_s^2 \quad \text{für alle } \varphi, \psi \in [0, 2\pi).$$

Hinweis: Man verwende die Fourier–Reihe von g, eine geeignete Hölder–Ungleichung, und schätze die verbleibende Summe durch ein geeignetes Integral ab.