Partielle Differentialgleichungen

8. Man bestimme eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}u(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)\right)^2 - 1 = 0, \quad u(x,0) = x\,.$$

Ist diese eindeutig?

9. Man bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$xy - \frac{\partial}{\partial x}u(x,y)\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = 0, \quad u(1,y) = y^2\,.$$

10. Man bestimme die schwache Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + u(t,x)\frac{\partial}{\partial x}u(t,x) \;=\; 0 \quad \text{für } (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(0,x) = u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq 0, \\ 1-x & \text{für } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

11. Man betrachte die Burgers–Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + u(t,x)\,\frac{\partial}{\partial x}u(t,x) = 0$$

mit der Anfangsfunktion

$$u(0,x) = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad x < -1, \\ x & \text{für} \quad -1 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{für} \quad x > 1. \end{cases}$$

Man skizziere die Charakteristiken und berechne die Lösung dieses Anfangswertproblems. Erfüllt die Lösung die Rankine–Hugoniot–Bedingung?