

Partielle Differentialgleichungen

16. Gegeben sei das Randwertproblem

$$-\operatorname{div}[\alpha(u(x))\nabla u(x)] = f(x) \quad \text{für } x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad u(x) = 0 \quad \text{für } x \in \Gamma = \partial\Omega$$

mit einem skalaren Diffusionskoeffizienten $\alpha(u)$. Mit einer geeigneten Transformation $v = v(x, \alpha, u)$ transformiere man die partielle Differentialgleichung auf die Poisson–Gleichung $-\Delta v = f$. Welche Voraussetzung muß dabei an $\alpha(u)$ gemacht werden? Wie ändern sich die Randbedingungen?

17. Gegeben seien die Funktionen

$$v_2(x, y) = \log |x - y| \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}^2, \quad v_3(x, y) = \frac{1}{|x - y|} \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}^3.$$

Man zeige

$$-\Delta_y v_n(x, y) = 0 \quad \text{für alle } y \neq x \in \mathbb{R}^n, \quad n = 2, 3.$$

18. Man bestimme eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$-\Delta_y u(x, y) = \log |y - x| \quad \text{für } y \neq x \in \mathbb{R}^2.$$

Hinweis: Man verwende Polarkoordinaten.