Technische Numerik

1. Betrachtet werde das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 1-\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 1+\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit eines kleinen Parameters $\varepsilon > 0$.

a) Man berechne die spektrale Konditionszahl

$$\kappa_2(A) = \frac{\lambda_{\max(}A)}{\lambda_{\min}(A)}$$

der Systemmatrix A.

b) Mittels des Gaußschen Eliminationsverfahrens bestimme man eine allgemeine Lösungsformel des linearen Gleichungssystems.

c) Für $\varepsilon = 10^{-4}$ und $a = b = 2$ bestimme man die (exakte) Lösung des linearen Gleichungssystems.it Wie ändert sich diese für $a = 2$ und $b = 2.1$?

d) Bei Verwendung einer dreiziffrigen Gleitkommaarithmetik wird die Summe $1 + \varepsilon$ für $\varepsilon = 10^{-4}$ mit 1 identifiziert. Wie ändern sich dann die Lösungen für $a = b = 2$ bzw. $a = 2$ und $b = 2.1$?

2. Wie lauten die Lagrange–Polynome 2. Ordnung zu den Stützstellen

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2.$$

Bezüglich dieser Stützstellen bestimme man das quadratische Interpolationspolynom der Funktion

$$f(x) = x^3.$$

3. Die Funktion $y = f(x) = \cos(2\pi x) + 4\sin(2\pi x)$ besitzt auf dem Intervall $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ eine eindeutig bestimmte Umkehrfunktion $x = g(y)$ (Warum?). Man bestimme das Interpolationspolynom $g_2(y)$ von g unter Verwendung der Stützstellen $y_i = f(x_i)$ mit $x_0 = \frac{1}{4}$, $x_1 = \frac{1}{3}$ und $x_2 = \frac{1}{2}$.