Technische Numerik

4. Für einen Parameter $h > 0$ seien die Stützstellen

$$x_0 = 0, \quad x_1 = h$$

gegeben. Man bestimme das lineare Interpolationspolynom f_1 der Funktion

$$f(x) = x^2$$

und berechne die Fehler

$$\max_{x \in [0,h]} |f(x) - f_1(x)|, \quad \int_0^h [f(x) - f_1(x)]^2 \, dx, \quad \int_0^h [f'(x) - f_1'(x)]^2 \, dx.$$

5. Gegeben ist die zu interpolierende Funktion $f(x) = 2 + x - x^3$.

a. Man bestimme das Interpolationspolynom $f_4 \in \Pi_4$, welche die Funktion f in den Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ und $x_4 = 4$ interpoliert. Weiters bestimme man den maximalen punktweisen Fehler im Intervall $[0, 4]$.

b. Man bestimme das Interpolationspolynom $f_2 \in \Pi_2$, welche die Funktion f in den Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ interpoliert. Ferner gebe man für das Intervall $[0, 2]$ eine Abschätzung für den maximalen punktweisen Fehler an.

6. Die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ werde im Intervall $[-5, +5]$ in den Stützstellen $x_i = -5 + \dfrac{10}{n} i$ für $i = 0, \ldots, n$ interpoliert. Für den Interpolationsfehler erhält man die Abschätzung

$$\max_{x \in [-5,+5]} |f(x) - f_n(x)| \leq \max_{x \in [-5,+5]} \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|$$

mit $\xi \in (-5, +5)$. Für $n = 1$ und für $n = 2$ bestimme man explizite obere Schranken des Fehlers und diskutiere diese.