# Technische Numerik

**19.** Sei die Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Man beweise die folgende Fehlerabschätzung für die Mittelpunktformel

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(\frac{a+b}{2}) + \frac{1}{24}f''(\eta)(b-a)^3$$

für ein $\eta \in (a,b)$, wobei alle Zwischenschritte angegeben werden sollen. Weiters beweise man, dass die Mittelpunktformel von der Ordnung 2 ist.

**20.** Sei $h > 0$. Zur Approximation des Integrals

$$I = \int\limits_0^h \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$$

mittels Mittelpunktformel gebe man eine nur von $h$ abhängige Fehlerabschätzung an.
Für $h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ berechne man den tatsächlichen Fehler und vergleiche diesen mit der theoretischen Voraussage.

**21.** Für eine Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ betrachte man die Integrationsformel

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx f(x_0)\omega_0 + f(x_1)\omega_1\,.$$

Seien $\omega_0 = \omega_1 = \frac{1}{2}$ und $x_1 = 1 - x_0$. Für diese Situation bestimme man die Integrationspunkte $x_0$ und $x_1$, so dass Polynome dritten Grades exakt integriert werden. Von welcher Ordnung ist diese Integrationsformel?