

Numerische Mathematik 2
(Partielle Differentialgleichungen)

1. Man schreibe den zweidimensionalen Laplace-Operator

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y)$$

in Polarkoordinaten $x = r \cos \phi$ und $y = r \sin \phi$.

Man zeige, dass die Funktion

$$u_\alpha(x, y) = u_\alpha(r, \phi) = r^\alpha \sin(\alpha \phi)$$

für $(x, y) \neq (0, 0)$ Lösung der zweidimensionalen Laplace-Gleichung ist.

2. Für eine stetig differenzierbare Funktion $u(x)$ mit $u(0) = u(1) = 0$ zeige man

$$\int_0^1 [u(x)]^2 dx \leq c \int_0^1 [u'(x)]^2 dx$$

mit einer geeigneten Konstanten c und diskutierte die Optimalität der Konstanten.

3. Gegeben sei die Funktion

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1 & \text{für } x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Man bestimme diejenigen $s \in (0, 1)$, für die der Ausdruck

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{[u(x) - u(y)]^2}{|x - y|^{1+2s}} dx dy$$

beschränkt ist.

4. Man weiß, dass für $u(x) = \sqrt{x}$ das Integral $\int_0^1 [u'(x)]^2 dx$ nicht existiert. Man zeige, dass die Sobolev-Slobodeckii-Halbnorm (siehe Bsp. 3) dennoch für alle $s \in (0, 1)$ existiert.

(Hinweis: Man verwende Polarkoordinaten und integriere über den Viertelkreis mit Radius $\sqrt{2}$.)