Technische Universität Graz — SS 2006

Institut für Numerische Mathematik — Blatt 2

Prof. Dr. Olaf Steinbach — 5.4.2006

Numerische Mathematik 2
(Partielle Differentialgleichungen)

5. Gegeben sei die Bilinearform

$$a(u,v) = \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) \frac{\partial}{\partial x_j} v(x) dx + \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) v(x) dx + \int\limits_\Omega c(x) u(x) v(x) dx$$

für einen gleichmäßig elliptischen Differentialoperator und weiter gelte $c(x) \geq c_0 > 0$. Welche Bedingung müssen an die Koeffizienten $b_i(x)$ gestellt werden, sodass

$$a(v,v) \geq c_1^a \cdot \|v\|^2_{W_1^2(\Omega)} \quad \text{für alle} \quad v \in W_1^2(\Omega)$$

mit einer positiven Konstanten $c_1^a > 0$ gilt.

6. Gegeben sei das Robin-Randwertproblem

$$-\triangle u(x) = f(x) \quad \text{für} \quad x \in \Omega,$$

$$\gamma_1^{int} u(x) + \kappa(x) \gamma_0^{int} u(x) = g(x) \quad \text{für} \quad x \in \Gamma.$$

Seien die Daten $f \in \tilde{H}^{-1}(\Omega)$ und $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$ gegeben. Außerdem sei $\kappa(x) \geq \kappa_0 > 0$ für alle $x \in \Gamma$ erfüllt. Zeigen sie, dass die zugehörige Variationsformulierung eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt. (Bemerkung: Sie können den Normierungssatz von Sobolev verwenden (Rückseite))

7. Gegeben sei eine gleichmäßige Unterteilung des Intervalls $[0,1]$ (welches periodisch fortgesetzt wird) in n Elemente. Außerdem seien stückweise lineare bzw. konstante Ansatzfunktionen $\phi_i(x)$ bzw. $\psi_i(x)$ wie folgt gegeben:

$$\psi_i(x) = \begin{cases} 1 & x \in [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}], \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{für } i = 0, \ldots, n-1,$$

$$\phi_i(x) = \begin{cases} -(i-1) + xn & x \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}], \\ i+1-xn & x \in [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}], \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{für } i = 0, \ldots, n.$$

Dabei gilt aufgrund der periodischen Fortsetzung $\phi_0 \triangleq \phi_n$.

1. Man zeige, dass wenn n gerade ist, die Stabilitätsbedingung

$$c\|\mu_h\|_{1/2} \leq \sup_{v_h \in V_h} \frac{\langle \mu_h, v_h \rangle}{\|v_h\|_{-1/2}}$$

nicht erfüllt ist ($v_h \in V_h = span\{\phi_i\}, \mu_h \in span\{\psi_i\}$).

2. Man untersuche den Fall für ungerades n bezüglich der Konstanten in der Stabilitätsbedingung.
3. Wie könnte man die Ansatzfunktionen modifizieren, sodass diese Probleme vermieden werden.

Normierungssatz von Sobolev:

Sei $f : W_2^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ ein beschränktes lineares Funktional mit

$$0 \leq |f(v)| \leq c_f \|v\|_{W_2^1(\Omega)} \quad \text{für alle}\, v \in W_2^1(\Omega).$$

Folgt aus $f(konstant) = 0$ stets $konstant = 0$, so definiert

$$\|v\|_{W_2^1(\Omega),f} := \left\{ |f(v)|^2 + \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}^2 \right\}^{1/2}$$

eine äquivalente Norm in $W_2^1(\Omega)$.