

Numerische Mathematik 2
(Partielle Differentialgleichungen)

8. Für eine stückweise lineare Funktion v_h zeige man

$$\|v_h\|_{L_\infty(\tau_l)} \leq c h_l^{-1} \|v_h\|_{L_2(\tau_l)} \quad \text{für } \tau_l \subset \mathbb{R}^2.$$

Wie lautet die Abschätzung für $\tau_l \subset \mathbb{R}^3$?

9. Man beweise die inverse Ungleichung

$$\|v_h\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq c \sum_{l=1}^N h_l^{-2} \|v_h\|_{L_2(\tau_l)}^2$$

für stückweise lineare Funktionen v_h ($h < 1$ ist vorauszusetzen).

10. Für das Referenzelement $\tau \subset \mathbb{R}^2$ gebe man die quadratischen Formfunktionen an, berechne die lokale Massematrix und bestimme deren extremalen Eigenwerte.

11. Bei einer eindimensionalen FEM-Approximation soll die gesuchte Funktion lokal durch Polynome des Grades 3 bzw. 4 approximiert werden (d.h. auf jedem Element wird die Funktion durch ein Polynom approximiert welches unabhängig ist vom Polynom des Nachbarelementes). Man berechne die lokale Massenmatrix und ihre Eigenwerte für das finite Element $[-1, 1]$, wobei als Ansatzfunktionen die

1. Lagrangepolynome,
2. aufintegrierten Legendrepolynome, d.h

$$\phi^0(s) := \frac{1}{2}(1-s), \quad \phi^1(s) := \frac{1}{2}(1+s),$$

$$\phi^j(s) := -2^{(j-1)} \int_{-1}^s L_{j-1}(t) dt \quad \text{für } j = 2, \dots, p.$$

verwendet werden sollen.