

Numerische Mathematik 2
(Partielle Differentialgleichungen)

12. Man beweise das Bramble-Hilbert-Lemma für den Fall $k = 2$.

13. Man betrachte die Differentialgleichung

$$-u''(x) + u(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in (0, 1)$$

mit der Randbedingung $u(0) = u(1) = 0$. Man stelle für eine gleichmäßige Unterteilung des Intervalls die Steifigkeitsmatrix auf. Hierbei verwende man die stückweise linearen und stetigen Ansatzfunktionen (Hütchenfunktionen), und die so genannten Bubblefunktionen (für das Referenzelement wäre dies die Funktion $\phi(x) = x(1-x)$). Danach sind die Freiheitsgrade der Bubblefunktionen aus dem Gleichungssystem zu eliminieren und das resultierende Gleichungssystem anzugeben.

14. Für die Variationsformulierung

$$\int_{\Omega} u(x)v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx$$

bestimme man die lokale Steifigkeitsmatrix $A_h \in \mathbb{R}$ und deren Eigenwerte für den Ansatzraum

$$S_h^2(\Omega) = \text{span}\{\phi_k^2\}_{k=1}^3 \subset H^1(\Omega)$$

mit den Ansatzfunktionen

$$\phi_1^2(x) = x, \quad \phi_2^2(x) = 1 - x, \quad \phi_3^2(x) = 4x(1 - x).$$

Bestimmen Sie nun die Systemmatrix $\bar{A}_h$, indem Sie die Integration durch die Mittelpunkformel

$$\int_a^b f(x)dx \simeq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

ersetzen. Untersuchen sie die Eigenschaften der Näherungsmatrix, welche Konsequenzen ergeben sich daraus?

15. Man zeige, dass $u(x) = x^{2/3} \in H^{7/6-\varepsilon}(0,1)$ für alle $\varepsilon > 0$ gilt. Man verwende hierzu die Sobolev-Slobodecki-Norm.