Technische Universität Graz | SS 2006
Institut für Numerische Mathematik | Blatt 5
Prof. Dr. Olaf Steinbach | 14.6.2006

Numerische Mathematik 2
(Partielle Differentialgleichungen)

16. $V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_h$ sei eine geschachtelte Folge von Ansatzräumen und Q_i sei die L_2-Projektion auf den Raum V_i, d.h.:

$$\langle Q_i u, v_i \rangle_{L_2} = \langle u, v_i \rangle_{L_2} \quad \text{für alle } v_i \in V_i.$$

- Man beweise: $Q_i Q_j = Q_{\min(i,j)}$
- Man vereinfache den Ausdruck $(Q_i - Q_{i-1})(Q_j - Q_{j-1})$.

17. Es sei die Differentialgleichung $-u''(x) = f(x)$ auf dem Interavall $(0,1)$ mit den Randbedingungen $u(0) = u(1) = 0$ gegeben. Es ist nun bekannt, dass die Lösung der Differentialgleichung durch

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y) f(y) dy$$

mit

$$G(x,y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{für } x < y \\ y(1-x) & \text{für } y < x \end{cases}$$

gegeben ist.

- Man stelle die Systemmatrix der FE-Diskretisierung der Differentialgleichung für ein gleichmäßiges Gitter auf. Als Anstzfunktionen sollen hierbei die stetigen und linearen 'Hütchenfunktionen' verwendet werden.
- Man finde mit Hilfe der Darstellungsformel eine geeignete Vorkonditionierung für die Systemmatrix. Man vergleiche die Konditionszahlen der Systemmatrix und der vorkonditionierten Matrix für $n = 5, 10$.
- Man überlege sich, wie man die Vorkonditionierungsmatrix effizient speichern könnte.

18. Für eine abzählbare Indexmenge I seien die Matrix $(A = [l,k])_{k,l \in I}$ und der Vektor $u = (u_k)_{k \in I}$ gegeben. Zeigen Sie, dass dann für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ die folgende Abschätzung gilt.

$$\|Au\|_2^2 \leq \left[\sup_{l \in I} \sum_{k \in I} |A[l,k]| 2^{\alpha(k-l)} \right] \cdot \left[\sup_{k \in I} \sum_{l \in I} |A[l,k]| 2^{\alpha(l-k)} \right] \cdot \|u\|_2^2.$$