Technische Universität Graz | SS 2006
Institut für Numerische Mathematik | Blatt 6
Prof. Dr. Olaf Steinbach | 28.6.2006

Numerische Mathematik 2
(Partielle Differentialgleichungen)

19. Gegeben sei die folgende Sattelpunktformulierung für das Neumann-Randwertproblem der Poissongleichung.
Gesucht ist $u \in H^1(\Omega)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx + \lambda \int_\Omega v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx + \int_\Gamma g(x)v(x)ds_x,$$
$$\int_\Omega u(x)dx = 0$$

für alle $v \in H^1(\Omega)$ erfüllt ist. Die Lösbarkeitsbedingung

$$\int_\Omega f(x)dx + \int_\Gamma g(x)ds_x = 0$$

sei hierbei vorausgesetzt.

1. Man untersuche die eindeutige Lösbarkeit des Sattelpunktproblems.
2. Man leite die modifizierte Variationsformulierung

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx + \int_\Omega u(x)dx \int_\Omega v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx + \int_\Gamma g(x)v(x)dx$$

   her.

20. Lineare Elastostatik. Gegeben sei das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \sigma &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \sigma - C\varepsilon(u) &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma_D, \\ \sigma \cdot n &= t \quad \text{auf } \Gamma_N, \end{aligned}$$

mit $u : \Omega \mapsto \mathbb{R}^3$ (Verschiebungsfeld), $\sigma : \Omega \mapsto \mathbb{R}^{3\times 3}$ (Spannungstensor), $\varepsilon(u) := \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$ (Verzerrungstensor) und $C\varepsilon = \lambda Tr(\varepsilon)I + 2\mu\varepsilon = \frac{E}{1+\nu}(\varepsilon + \frac{\nu}{1-2\nu}Tr(\varepsilon)I)$.

1. Seien nun $\underline{\sigma} := (\sigma_{11}, \ldots, \sigma_{23})^T$ der Komponentenvektor des Spannungsfeldes und analog dazu $\underline{\varepsilon}$ der Komponentenvektor des Verzerrungsfeldes. Bestimmen Sie die 6×6 Matrix $\tilde{C}$ mit

$$\underline{\sigma} = \tilde{C}\underline{\varepsilon}$$

   in Abhängigkeit von E und ν. Wie lautet die Inverse? Für welche $\nu \geq 0$ ist die Matrix positiv definit?
2. Die gemischte Variationsformulierung nach Hellinger und Reissner.
   Finden Sie eine Variationsformulierung, indem die Verschiebung als auch die Spannung im Ansatz bleiben, während die Verzerrungen eliminiert werden.