Technische Universität Graz
Institut für Mathematik D
Prof. Dr. Olaf Steinbach

WS 2005/2006
Blatt 10
12.1.2006

Technische Numerik

28. Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mittels des Orthogonalisierungsverfahrens nach Gram-Schmidt finde man A-orthogonale Vektoren $\underline{p}_i$, d.h. es gilt

$$(A\underline{p}_i, \underline{p}_j) = 0 \quad \text{für } i \neq j.$$

Man verwende diese in einem geeigneten Ansatz zur Lösung des linearen Gleichungssystems

$$A\underline{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

29. Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 15 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ 35 \end{pmatrix}.$$

Man bestimme Näherungslösungen des überbestimmten linearen Gleichungssystems

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

durch Transformation auf ein lineares Gleichungssystem mit oberer Dreiecksmatrix ($R\underline{x} = Q^*b$, wobei $A = QR$, Q eine orthonormale Matrix und R eine obere Dreiecksmatrix ist) bzw. durch Multiplikation mit der transpornierten Systemmatrix ($A^*A\underline{x} = A^*\underline{b}$).

30. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

mit der exakten Lösung $(x_1, x_2)^\top = (1, 1)^\top$.
a) Man gebe die Iterationsvorschrift des Jacobi-Verfahrens (siehe Beispiel 26) an und untersuche die Konvergenz in der Maximum-Norm.
b) Für die Anfangsnäherung $\underline{x}^0 = (0, 0)^\top$ bestimme man eine a priori Fehlerabschätzung in der Maximum-Norm nach zwei Iterationsschritten.
c) Für die Anfangsnäherung $\underline{x}^0 = (0, 0)^\top$ führe man zwei Iterationsschritte durch und berechne den tatsächlichen Fehler in der Maximum-Norm.