Technische Universität Graz
Institut für Mathematik D
Prof. Dr. Olaf Steinbach

WS 2005/2006
Blatt 2
20.10.2005

Technische Numerik

4. Für $n = 2$ und die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$ berechne man die zugehörigen Lagrange-Polynome $L_j(x)$ für $j = 0, 1, 2$.
Man stelle die Monome $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$ und $\varphi_2(x) = x^2$ als Linearkombination der Lagrange-Polynome dar, d.h. man bestimme Koeffizienten a_{ij}, so dass

$$\varphi_i(x) = x^i = \sum_{j=0}^{2} a_{ij} L_j(x)$$

für $i = 0, 1, 2$ gilt.

5. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+5x^2}$ werde im Intervall [-2,2] in den Stützstellen $x_i = -2 + \frac{4}{n} i$ für $i = 0, ..., n$ interpoliert. Für den Interpolationsfehler erhält man die Abschätzung

$$\max_{x \in [-2,+2]} |f(x) - f_n(x)| \leq \max_{x \in [-2,+2]} \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|$$

mit $\xi \in (-2, +2)$. Für $n = 1$ und $n = 2$ bestimme man explizite obere Schranken des Fehlers und diskutiere diese.

6. Die Funktion $y = f(x) = 4\cos(\pi x) - 2\sin(\pi x)$ besitzt auf dem Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ eine eindeutig bestimmte Umkehrfunktion x = g(y) (Warum?). Man bestimme das Interpolationspolynom g_2 von g unter Verwendung der Stützstellen $y_i = f(x_i)$ mit $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$.