Technische Universität Graz
Institut für Mathematik D
Prof. Dr. Olaf Steinbach

WS 2005/2006
Blatt 3
27.10.2005

Technische Numerik

7. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+5x^2}$ werde im Intervall $[-2, +2]$ linear und quadratisch interpoliert(vergleiche Beispiel 5). Als Stützstellen werden die auf das Intervall $[-2, +2]$ transformierten Nullstellen der Tschebeyscheff-Polynome verwendet. Man berechne die Stützstellen und bestimme explizite obere Schranken des Fehlers und vergleiche sie mit mit jenen von Beispiel 5.

8. Für die Funktion $f(x) = \sqrt{4 + 16x^2}$, $x \in [-1, +1]$ bestimme man die quadratische Polynominterpolation mit Tschebycheff-Polynomen, so dass der Fehler in der Maximumsnorm minimal ist. Hierzu stelle man einerseits das lineare Gleichungssystem auf, andererseits benutze man eine explizite Lösungsformel für die Zerlegungskoeffizienten.

9.a) Sei $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ zweimal stetig differenzierbar und $f_n(x)$ ihre zugehörige interpolierende lineare Splinefunktion. h_{max} sei die maximale Schrittweite.
Man zeige:

$$\max_{x\in[a,b]} | f(x) - f_n(x) | \leq \frac{h_{\max}^2}{8} \max_{\xi\in[a,b]} |f''(\xi)|.$$

Hinweis: Man verwende die in der Vorlesung dargestellte allgemeine Formel für die Abschätzung des Interpolationsfehlers.

9.b) Für die stückweise linear Interpolierende $f_n(x)$ der auf dem Intervall $[\frac{1}{5}, 1]$ gegebenen Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ gilt die Fehlerabschätzung

$$\int_{\frac{1}{5}}^{1} [f(x) - f_n(x)]^2 dx \leq \frac{1}{2} h^4 \int_{\frac{1}{5}}^{1} |f''(s)|^2 ds$$

bei gleichmäßig verteilten Stützstellen mit der Schrittweite h.
Man bestimme die Anzahl der Stützstellen, so dass die Fehlerabschätzung kleiner als 10^{-2} ist.