

Technische Numerik

10. Gegeben seien die vier Stützstellen $x_i = i$ für $i = 0, 1, 2, 3$. Man bestimme eine stetig differenzierbare Ansatzfunktion $\varphi(x)$, welche in den Intervallen $[x_{i-1}, x_i]$ für $i = 1, 2, 3$ durch ein quadratisches Polynom beschrieben werden kann, und für welche

$$\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \varphi(x_3) = \varphi'(x_3) = 0$$

gilt.

11. Sei $\Pi_2 = \text{span}\{\varphi_j\}_{j=0}^2$ mit $\varphi_j(x) = x^j$. Für $f(x) = \sin \pi x + \cos \pi x$ und $x \in [-2, +2]$ bestimme man die Bestapproximierende $Q_2 f \in \Pi_2$ als Lösung von

$$\int_{-2}^2 Q_2 f(x) \varphi_j(x) dx = \int_{-2}^2 f(x) \varphi_j(x) dx \quad \text{für } j = 0, 1, 2.$$

12. Sei $f(x) = x^2$ gegeben auf dem Intervall $I = [0, 1]$. Zu bestimmen ist für $n = 2$ die Projektion auf den Raum der stückweise linearen Ansatzfunktionen. Dabei verwende man als Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{2}{3}$ und $x_2 = 1$. Anschließend berechne man den Approximationsfehler in der L_2 -Norm.