Technische Numerik

13. Für die stückweise linear Interpolierende $f_2(x)$ der auf dem Intervall $[\frac{1}{5}, 1]$ gegebenen Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ gilt die Fehlerabschätzung

$$\int_{\frac{1}{5}}^{1} [f(x) - f_2(x)]^2 dx \leq \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{2} h_i^4 \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f''(s)|^2 ds$$

Wie muss der Interpolationsknoten x_1 gewählt werden, damit beide Summanden auf der rechten Seite übereinstimmen?

14. Sei $f_n(x)$ eine auf den Stützstellen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ gebildete lineare Spline-Interpolationsfunktion. Man zeige, dass $f_n(x)$ in der Form

$$f_n(x) = ax + b + \sum_{i=1}^{n-1} c_i |x_i - x|$$

dargestellt werden kann.

15. Es sei $f(x)$ auf $[a, b]$ zweimal stetig differenzierbar. Man beweise die folgende Fehlerabschätzung für die Mittelpunktformel

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(\frac{a+b}{2}) + \frac{1}{24} f''(\eta)(b-a)^3, \qquad \eta \in (a, b).$$

Hinweis: Man verwende die Taylorentwicklung von $f(x)$ um $\frac{a+b}{2}$.