

Technische Numerik

16. Zur Approximation des Integrals

$$I(h) = \int_0^h \frac{1}{1+x} dx$$

mittels Mittelpunktsformel gebe man eine nur von h abhängige Fehlerabschätzung an.

Für $h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ berechne man den tatsächlichen Fehler und vergleiche diesen mit der theoretischen Voraussage.

17. Es sei $f(x)$ auf $[a, b]$ zweimal stetig differenzierbar. Man beweise die folgende Fehlerabschätzung für die zusammengesetzte Trapezregel

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2}(f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{m-1} f(x_k)) - \frac{h^2(b-a)}{12} f''(\mu),$$

mit $h = \frac{b-a}{m}$, $x_k = a + kh$ für $k = 0, \dots, m$ und $\mu \in (a, b)$.

Wie groß muss m gewählt werden, um das Integral mit der zusammengesetzten Trapezregel

$$\int_0^4 \frac{1}{1+x} dx$$

mit einer absoluten Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-5}$ zu approximieren.

18. Die zusammengesetzte Simpsonregel lässt sich darstellen mit

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3}[f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k}) + 4 \sum_{k=1}^m f(x_{2k-1})] - \frac{h^4(b-a)}{180} f^{(4)}(\mu),$$

mit $h = \frac{b-a}{2m}$, $x_k = a + kh$ für $k = 0, \dots, 2m$ und $\mu \in (a, b)$.

Berechnen Sie für $m = 4$ einen Näherungswert des Integrals

$$I = \int_0^4 \frac{1}{1+x} dx$$

mit der zusammengesetzten Simpsonregel und der zusammengesetzten Trapezregel.

Bestimmen Sie die Anzahl der Stützstellen, um I mit der zusammengesetzten Simpsonregel mit einer absoluten Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-5}$ zu approximieren.