Technische Universität Graz
Institut für Mathematik D
Prof. Dr. Olaf Steinbach

WS 2005/2006
Blatt 7
24.11.2005

Technische Numerik

19. Die zusammengesetzte Simpsonregel läßt sich darstellen mit

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k}) + 4\sum_{k=1}^{m} f(x_{2k-1})] - \frac{h^4(b-a)}{180} f^{(4)}(\mu),$$

mit $h = \frac{b-a}{2m}$, $x_k = a + kh$ für $k = 0, \ldots, 2m$ und $\mu \in (a, b)$.
Berechnen Sie für $m = 4$ einen Näherungswert des Integrals

$$I = \int_0^4 \frac{1}{1+x} dx$$

mit der zusammengesetzten Simpsonregel und der zusammengesetzten Trapezregel.
Bestimmen Sie die Anzahl der Stützstellen, um I mit der zusammengesetzten Simpsonregel mit einer absoluten Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-5}$ zu approximieren.

20. Man bestimme die Stützstellen x_k und Integrationsgewichte ω_k der Gauß-Legendre Integrationsformel

$$\int_0^4 f(x)dx = \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1)$$

und verwende diese Formel zur näherungsweise Berechnung von

$$\int_0^4 \frac{1}{1+x} dx.$$

21. Für das Referenz-Quadrat $\tau = (0, 1)^2$ ist eine numerische Integrationsformel

$$\int_\tau f(x, y)dydx = \sum_{k=1}^{4} \omega_k f(x_k, y_k) + R_4$$

herzuleiten, die Polynome

$$p_2(x, y) = \sum_{\alpha_1+\alpha_2 \leq 2} a_\alpha x^{\alpha_1} y^{\alpha_1}$$

exakt integriert.
Hinweis: Man nutze Symmetrien in der Lage der Stützstellen und bei der Bestimmung der Integrationsgewichte aus!