Technische Numerik

22. Zur Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

wende man das CG-Verfahren mit der Startnäherung $\underline{x}^0 = \underline{0}$ an.

23. Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ durch

$$A = I + \underline{e} \underline{e}^\top \quad \text{mit } \underline{e} = (1, \dots, 1)^\top.$$

Man bestimme alle Eigenwerte von A .

24. Für eine symmetrische und positiv definite Matrix A konvergiert das CG-Verfahren mit der Konvergenzabschätzung

$$\|\underline{x}^{k+1} - \underline{x}\|_A \leq \frac{2q^k}{1+q^{2k}} \|\underline{x}^0 - \underline{x}\|_A$$

und

$$q = \frac{\sqrt{\kappa_2(A)} + 1}{\sqrt{\kappa_2(A)} - 1}, \quad \kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}.$$

Für die in Aufgabe **23.** gegebene Matrix A bestimme man die Anzahl der zur näherungsweisen Lösung des linearen Gleichungssystems $A\underline{x} = \underline{f}$ notwendigen CG-Iterationen, um für die Startnäherung $\underline{x}^0 = \underline{0}$ eine relative Fehlerreduktion von ε zu gewährleisten.