Technische Universität Graz
Institut für Mathematik D
Prof. Dr. Olaf Steinbach

WS 2005/2006
Blatt 8
1.12.2005

Technische Numerik

22. Zur Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

wende man das CG-Verfahren mit der Startnäherung $\underline{x}^0 = 0$ an.

23. Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ durch

$$A = I + \underline{e}\,\underline{e}^\top \qquad \text{mit } \underline{e} = (1, \ldots, 1)^\top .$$

Man bestimme alle Eigenwerte von A.

24. Für eine symmetrische und positiv definite Matrix A konvergiert das CG-Verfahren mit der Konvergenzabschätzung

$$\|\underline{x}^{k+1} - \underline{x}\|_A \le \frac{2q^k}{1 + q^{2k}} \|\underline{x}^0 - \underline{x}\|_A$$

und

$$q = \frac{\sqrt{\kappa_2(A)} + 1}{\sqrt{\kappa_2(A)} - 1}, \qquad \kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}.$$

Für die in Aufgabe **23.** gegebene Matrix A bestimme man die Anzahl der zur näherungsweisen Lösung des linearen Gleichungssystems $A\underline{x} = \underline{f}$ notwendigen CG-Iterationen, um für die Startnäherung $\underline{x}^0 = \underline{0}$ eine relative Fehlerreduktion von ε zu gewährleisten.