Technische Universität Graz | WS 2005/2006
Institut für Mathematik D | Blatt 9
Prof. Dr. Olaf Steinbach | 15.12.2005

Technische Numerik

25. Für reguläre Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und einen reellen Parameter $\alpha > 0$ werde das Iterationsverfahren

$$\underline{x}^{k+1} := \underline{x}^k - \alpha B^{-1}(A\underline{x}^k - \underline{f})$$

betrachtet. Für die Iterationsmatrix gelte

$$\|I - \alpha B^{-1}A\|_M \leq q < 1$$

in einer durch die Vektornorm $\|\cdot\|_V$ induzierten Matrixnorm $\|\cdot\|_M$. Man zeige, dass das Iterationsverfahren gegen $\underline{x} = A^{-1}\underline{f}$ konvergiert. Weiter zeige man die a priori Fehlerabschätzung

$$\|\underline{x}^{k+1} - \underline{x}\|_V \leq \frac{q^{k+1}}{1-q}\|\underline{x}^1 - \underline{x}^0\|_V$$

sowie die a posteriori Fehlerabschätzung

$$\|\underline{x}^{k+1} - \underline{x}\|_V \leq \frac{q}{1-q}\|\underline{x}^{k+1} - \underline{x}^k\|_V .$$

26. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$A\underline{x} = \underline{f}$$

mit einer regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Das Jacobi-Verfahren ist durch folgende Iterationsvorschrift

$$\underline{x}^{k+1} = \underline{x}^k - D^{-1}[A\underline{x}^k - \underline{f}]$$

gegeben, wobei D eine Diagonalmatrix mit $D = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ ist.
Man zeige, dass das Jacobi-Verfahren für jede beliebige Startnäherung $\underline{x}^0$ konvergiert, wenn für die Matrix A das strenge Zeilensummenkriterium

$$\max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} \leq q < 1$$

erfüllt ist.

27. Durch Anwendung zweier Givens-Rotationen G_1 und G_2 bringe man die gegebene Matrix A auf obere Dreiecksgestalt, d.h.

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 15 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad G_2G_1A = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$